



Planeamento de Rotas de Distribuição

Mestrado de Estatística e Investigação Operacional
Especialização em Investigação Operacional

João Carlos Lopes da Silva

Dissertação orientada por:
Professor Doutor Luís Eduardo Neves Gouveia
Professora Doutora Ana Maria Duarte Silva Alves Paias

Em primeiro lugar gostaria de agradecer aos meus orientadores, o Professor Doutor Luís Eduardo Neves Gouveia e a Professora Doutora Ana Maria Duarte Silva Alves Paias pela confiança, apoio demonstrado e pela partilha de conhecimento, no âmbito da elaboração da presente dissertação. Foi uma honra.

Em segundo lugar um agradecimento à minha família, em especial aos meus pais, irmãos e sobrinhos, a quem lhes devo a pessoa que sou hoje e representam a origem da minha motivação e força para alcançar os objetivos propostos.

Por fim, e não menos importante, um agradecimento muito especial à minha namorada, pela presença assídua na minha vida e ao longo do mestrado.

Resumo

Considerando um conjunto de clientes que necessitam de ser visitados num intervalo de tempo previamente conhecido, o *Traveling Salesman Problem with Time Windows* (TSPTW) consiste em determinar uma rota de custo mínimo, com início e fim num depósito, garantindo que todos os clientes sejam visitados na respetiva janela temporal. São conhecidos os clientes a servir, os custos e tempos de deslocação entre cada par de clientes e entre cada cliente e o depósito, os tempos de serviço e a janela temporal de cada cliente, bem como o tempo e distância máxima da rota. A rota tem associado um custo resultante da soma dos custos de deslocação.

Existem diversas variantes do problema, pelo que nesta dissertação são estudadas as variantes do TSPTW com vista à minimização da distância total percorrida com tempos de espera, minimização da duração da rota com e sem possibilidade de tempos de espera, no caso de o veículo chegar ao cliente antes do início da respetiva janela temporal. Para cada problema, é considerado uma variação da amplitude das janelas temporais de cada cliente a ser visitado.

O TSPTW pertence à classe de problemas NP-difícil, por ser uma extensão do clássico TSP.

Na presente dissertação são propostos dois modelos para o TSPTW: um modelo baseado nas restrições de Miller-Tucker-Zemlin (MTZ) e um outro Modelo de Fluxo Agregado (MFA). Pretende-se comparar os modelos propostos na resolução de problemas para as diversas variantes em estudo, bem como a comparação da qualidade da correspondente relaxação linear.

Para comparar os modelos propostos, foram utilizadas instâncias de referência da literatura. Com um número de clientes a variar entre 20 a 200 e com diferentes amplitudes de janelas temporais para cada problema, os métodos utilizados permitiram resolver os problemas, em que não era conhecido o seu valor ótimo.

Palavras-Chave: Algoritmos exactos, *Traveling Salesman Problem*, *Vehicle Routing Problem*, *Time Windows*.

Abstract

Given a set of customers who need to be visited in a previously known time window, the Traveling Salesman Problem with Time Windows (TSPTW) is to determine a minimum cost route, starting and ending in a depot, ensuring that all customers are visited in the them time window. All customers to serve are known, cost and travel times between each pair of customers and between each customer and the depot, service times and the time window of each client, as well as the maximum time and route distance. The route has an associated cost, resulting from the sum of the travel costs.

There are several variants of the problem, so this thesis is to studied TSPTW variants with goal to minimizing the total distance traveled with waiting times, minimizing the duration of the route with and without possibility of waiting times, in case of the vehicle reach the client before the start of respective time window. For each problem, it is considered a variation of the length of time windows of each client to be visited.

The TSPTW belongs to the class of NP-hard problems, being an extension of the classic TSP.

In this thesis two models are proposed for TSPTW: a model based on the constraints of Miller-Tucker-Zemlin (MTZ) and another Aggregated Flow Model (MFA). Aims to compare the formulations in getting the solutions of the several variants in study, as well as the quality of linear relaxation.

To compare the models, it were used the literature reference instances. With a number of customers range from 20 to 200 with different ranges and time windows for each problem, the methods allow solving problems, that it was not known the optimal solution.

Keywords: Exact algorithms, Traveling Salesman Problem, Vehicle Routing Problem, Time Windows.

Índice

Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	ix
1. Introdução	1
2. Planeamento de Rotas de Distribuição	3
2.1 Objetivos do Planeamento de Rotas de Distribuição	4
2.2 Eficiência no Planeamento de Rotas	5
2.3 Revisão Bibliográfica.....	6
2.3.1 Generalizações de VRPTW	8
2.3.2 Métodos de Resolução de VRPTW	11
2.4 Influência das Janelas Temporais.....	15
3. Modelos	19
3.1 Definição do Problema.....	19
3.2 Formulações	21
3.2.1 Modelo Miller-Tucker-Zemlin Com Tempos de Espera.....	21
3.2.2 Modelo Miller-Tucker-Zemlin Sem Tempos de Espera	24
3.2.3 Modelo de Fluxo Agregado Com Tempos de Espera	25
3.2.4 Modelo de Fluxo Agregado Sem Tempos de Espera	27
3.2.5 Desigualdades Válidas.....	28
4. Experiência Computacional	31
4.1 Instâncias	31
4.3 Valores Obtidos.....	32
4.4 Comparação dos Modelos	37
4.4.1 Minimizar a Distância Total Percorrida Com Tempos de Espera...	38
4.4.2 Minimizar a Duração da Rota Com Tempos de Espera	43
4.4.3 Minimizar a Duração da Rota Sem Tempos de Espera.....	47

4.4.4 Minimizar a Distância Total Percorrida Com Limite Máximo de Tempo de Visita a Cada Cliente.....	50
4.4.5 Número de Variáveis e Restrições	52
4.5 Variação das Janelas Temporais	53
5. Conclusões	63
Referências	67
Apêndice A	71
Resultados Completos	71
A.1 Resultados obtidos com vista à minimização da distância total percorrida com tempos de espera	72
A.2 Resultados obtidos com vista à minimização da duração da rota com tempos de espera	75
A.3 Resultados obtidos com vista à minimização da duração da rota sem tempos de espera	78
A.4 Resultados obtidos com vista à minimização da distância total percorrida com limite máximo de visita a cada cliente.....	81
A.5 Resultados obtidos com a variação das janelas temporais	82

Lista de Figuras

Figura 2. 1: Representação esquemática de um exemplo do VRP	7
Figura 2. 2: Solução ótima para o problema TSP para uma instância com $n = 5$ clientes a visitar	16
Figura 2. 3: Solução ótima para o problema TSPTW para a instância com $n = 5$ clientes a visitar nos respectivos intervalos de tempo.....	17
Figura 3. 1: Ilustração da visita a um cliente, com possibilidade de espera	20
Figura 4. 1: Comparação dos valores de gap do RRB, com 20 e 60 unidades de tempo de amplitude para as janelas temporais	39
Figura 4. 2: Evolução dos tempos de espera no objetivo de minimizar a distância total.....	41
Figura 4. 3: Evolução dos tempos de espera no objetivo de minimizar a duração da rota	45
Figura 4. 4: Variação do limite inferior da janela temporal a_j , com b_j fixo, $\forall j \in V$, do problema (20,60), no objetivo de minimizar a distância total percorrida, com tempos de espera	55
Figura 4. 5: Variação do limite superior da janela temporal b_j , com a_j fixo, $\forall j \in V$, do problema (20,60), no objetivo de minimizar a distância total percorrida, com tempos de espera	56
Figura 4. 6: Variação do limite inferior da janela temporal a_j , com b_j fixo, $\forall j \in V$, do problema (20,60), no objetivo de minimizar a duração da rota, com tempos de espera.....	57
Figura 4. 7: Variação do limite superior da janela temporal b_j , com a_j fixo, $\forall j \in V$, do problema (20,60), no objetivo de minimizar a duração da rota, com tempos de espera.....	58
Figura 4. 8: Variação do limite inferior da janela temporal a_j , com b_j fixo, $\forall j \in V$, do problema (20,60), no objetivo de minimizar a duração da rota, sem tempos de espera	60
Figura 4. 9: Variação do limite superior da janela temporal b_j , com a_j fixo, $\forall j \in V$, do problema (20,60), no objetivo de minimizar a duração da rota, sem tempos de espera	60

Lista de Tabelas

Tabela 4. 1: Comparação dos valores ótimos com os valores da literatura, com o objetivo de minimizar distância total percorrida, com tempos de espera.....	34
Tabela 4. 2: Valores obtidos para as instâncias de referência com o objetivo de minimizar a duração da rota, com tempos de espera.....	35
Tabela 4. 3: Valores obtidos para as instâncias de referência com o objetivo de minimizar a duração da rota, sem tempos de espera	36
Tabela 4. 4: Comparação dos modelos MTZ e MFA com o objetivo de minimizar a distância total percorrida, com tempos de espera.....	38
Tabela 4. 5: Comparação dos modelos MTZ e MFA com o objetivo de minimizar distância total percorrida, com tempos de espera, em termos da qualidade dos limites inferiores dados pela relaxação linear, com e sem desigualdades válidas	42
Tabela 4. 6: Comparação dos modelos MTZ e MFA com o objetivo de minimizar a duração da rota, com tempos de espera.....	44
Tabela 4. 7: Comparação dos modelos MTZ e MFA com o objetivo de minimizar a duração total da rota, com tempos de espera, em termos da relaxação linear com e sem desigualdades	46
Tabela 4. 8: Comparação dos modelos MTZ e MFA com o objetivo de minimizar a duração da rota, sem tempos de espera	48
Tabela 4. 9: Comparação dos modelos MTZ e MFA com o objetivo de minimizar a duração total da rota, sem tempos de espera, em termos da relaxação linear com e sem desigualdades válidas	49
Tabela 4. 10: Comparação dos modelos MTZ e MFA com o objetivo de minimizar distância total percorrida, considerando apenas o limite superior $b_j, \forall j \in V$	51
Tabela 4. 11: Comparação dos modelos MTZ e MFA em termos da resolução da relaxação linear com desigualdades válidas, com o objetivo de minimizar distância total percorrida com apenas o limite superior da janela temporal $b_j, \forall j \in V$	51
Tabela 4. 12: Comparação dos modelos MTZ e MFA em termos do número de variáveis e restrições.....	53

Tabela 4. 13: Variação do limite inferior da janela temporal aj , com bj fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a distância total percorrida, com tempos de espera.....	54
Tabela 4. 14: : Variação do limite superior da janela temporal bj , com aj fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a distância total percorrida, com tempos de espera.....	55
Tabela 4. 15: Variação do limite inferior da janela temporal aj , com bj fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a duração da rota, com tempos de espera	56
Tabela 4. 16: Variação do limite superior da janela temporal bj , com aj fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a duração da rota, com tempos de espera	57
Tabela 4. 17: Variação do limite inferior da janela temporal aj , com bj fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a duração da rota, sem tempos de espera.	59
Tabela 4. 18: Variação do limite superior da janela temporal bj , com aj fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a duração da rota, sem tempos de espera.	59
Tabela A. 1: Resultados obtidos pelos modelos MTZ e MFA na variante com o objetivo de minimizar a distância total percorrida com tempos de espera.....	72
Tabela A. 2: Resultados obtidos pelos modelos MTZ e MFA na resolução da relaxação linear com a variante que consiste em minimizar a distância total percorrida com tempos de espera	73
Tabela A. 3: Resultados obtidos pelos modelos MTZ e MFA na variante com o objetivo de minimizar a duração da rota com tempos de espera.....	75
Tabela A. 4: Resultados obtidos pelos modelos MTZ e MFA na resolução da relaxação linear com a variante que consiste em minimizar a duração da rota com tempos de espera.....	76
Tabela A. 5: Resultados obtidos pelos modelos MTZ e MFA na variante com o objetivo de minimizar a duração da rota sem tempos de espera	78
Tabela A. 6: Resultados obtidos pelos modelos MTZ e MFA na resolução da relaxação linear com a variante que consiste em minimizar a duração da rota sem tempos de espera.....	79
Tabela A. 7: Resultados obtidos pelos modelos MTZ e MFA na variante que consiste em minimizar a distância total percorrida com limite máximo de tempo de visita a cada cliente.....	81
Tabela A. 8: Resultados obtidos pelos modelos MTZ e MFA na resolução da relaxação linear com a variante que consiste em minimizar a distância total percorrida com limite máximo de tempo de visita a cada cliente	82
Tabela A. 9: Resultados obtidos pelo modelo MTZ na variação do limite inferior da janela temporal aj , com bj fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a distância total percorrida, com tempos de espera.....	83

Tabela A. 10: Resultados obtidos pelo modelo MTZ na variação do limite superior da janela temporal b_j , com a_j fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a distância total percorrida, com tempos de espera.....	83
Tabela A. 11: Resultados obtidos pelo modelo MTZ na variação do limite inferior da janela temporal a_j , com b_j fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a duração da rota, com tempos de espera.....	84
Tabela A. 12: Resultados obtidos pelo modelo MTZ na variação do limite superior da janela temporal b_j , com a_j fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a duração da rota, com tempos de espera.....	84
Tabela A. 13: Resultados obtidos pelo modelo MTZ na variação do limite inferior da janela temporal a_j , com b_j fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a duração da rota, sem tempos de espera	85
Tabela A. 14: Resultados obtidos pelo modelo MTZ na variação do limite superior da janela temporal b_j , com a_j fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a duração da rota, sem tempos de espera	85
Tabela A. 15: Resultados obtidos pelo MFA na variação do limite inferior da janela temporal a_j , com b_j fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a distância total percorrida, com tempos de espera	86
Tabela A. 16: Resultados obtidos pelo MFA na variação do limite superior da janela temporal b_j , com a_j fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a distância total percorrida, com tempos de espera	86
Tabela A. 17: Resultados obtidos pelo MFA na variação do limite inferior da janela temporal a_j , com b_j fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a duração da rota, com tempos de espera	87
Tabela A. 18: Resultados obtidos pelo MFA na variação do limite superior da janela temporal b_j , com a_j fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a duração da rota, com tempos de espera	87
Tabela A. 19: Resultados obtidos pelo MFA na variação do limite inferior da janela temporal a_j , com b_j fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a duração da rota, sem tempos de espera.....	88
Tabela A. 20: Resultados obtidos pelo MFA na variação do limite superior da janela temporal b_j , com a_j fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a duração da rota, sem tempos de espera.....	88

Capítulo 1

Introdução

A globalização atual é sinónimo de competitividade para o mercado dos transportes de mercadorias. As empresas, inseridas num mercado dinâmico e com níveis de exigência elevados, necessitam de ser competitivas e com capacidade de diferenciação, face à concorrência.

Hoje em dia, os gestores responsáveis pela gestão destas empresas é obrigada a procurar e implementar ativamente estratégias inovadoras para garantir vantagens competitivas, bem como a sua rentabilidade. Assim, a logística assume um papel fundamental para melhorar a eficiência das empresas, dado que faz parte da gestão da cadeia de abastecimento, implementa e controla o fluxo de bens e serviços entre o ponto de origem e o ponto de consumo, de modo a ir ao encontro das necessidades dos clientes. O cliente atual é cada vez mais exigente e menos tolerante. Pretende o produto certo, no sítio certo, na hora exata e na quantidade certa. A atividade logística revela-se fundamental, permitindo adicionar valor e utilidade ao produto.

Na logística, o transporte desempenha uma função decisiva. Este é o elemento que assume maior importância nos custos logísticos. É responsável pelo movimento físico dos produtos desde o local onde são produzidos até onde são comercializados. Deste modo, o transporte é considerado o elemento chave da cadeia de abastecimento.

Na presente dissertação pretende-se estudar a variante do problema de planeamento de rotas de distribuição com janelas temporais, em que cada cliente é servido num intervalo de tempo previamente definido, designado por janela temporal. A ação das janelas temporais neste problema pode tornar uma rota mais longa em termos de distância e tempo. É considerada a possibilidade de o veículo poder ou não esperar, no caso deste chegar mais cedo ao cliente. Em geral, esperar antes do início da janela temporal não implica custos. As janelas temporais surgem naturalmente em problemas de empresas com atividades agendadas, tais como de patrulha de segurança, entrega de correio postal, autocarros escolares, distribuição de

jornais, etc. Por outro lado, em zonas urbanas, é comum existirem limitações de horários de permanência de veículos de distribuição na visita aos seus clientes, restringindo a possibilidade de espera na visita ao cliente.

Na literatura este problema é conhecido pelo Problema de Roteamento de Veículos com Janelas Temporais (*Vehicle Routing Problem with Time Windows* - VRPTW) e, no seu caso particular, pelo Problema do Caixeiro Viajante com Janelas Temporais (*Travelling Salesman Problem with Time Windows* - TSPTW).

Em grande medida, este conjunto de observações motivou a orientação para este trabalho, que tem como objetivo a idealização, comparação e análise de formulações em programação inteira mista (PLIM) para o problema TSPTW. São propostos três objetivos distintos: a minimização da distância total percorrida pelo veículo, a minimização da duração da rota com e sem tempos de espera.

Os modelos propostos, no âmbito desta dissertação, são o modelo baseado nas restrições de Miller-Tucker-Zemlin (MTZ) e o Modelo de Fluxo Agregado (MFA). Foi também concebida e implementada uma formulação de Modelo de Fluxo Desagregado (MFD) mas, perante o seu elevado número de variáveis e restrições, não produziu resultados satisfatórios, pelo que não é considerada neste estudo. Na implementação destes modelos, foi utilizado o *software* IBM ILOG CPLEX *Optimization Studio* 12.6.2. Tipicamente, os modelos com janelas temporais produzem bons limites inferiores, pelo que também se pretende avaliar o pré-processamento do *software* utilizado, na obtenção do primeiro limite inferior para a resolução de cada problema, em ambos os modelos em estudo.

Após a introdução da dissertação, é feita uma caracterização do problema, enquanto processo de decisão, do ponto de vista de uma empresa de transporte rodoviário, e fundamentar a perceção da eficiência do planeamento de rotas através de referências a documentos e relatórios publicados. Por sua vez, é feito um enquadramento teórico dos *Travelling Salesman Problem* (TSP) e *Vehicle Routing Problem* (VRP), bem como os TSPTW e VRPTW, sob a forma de uma breve revisão bibliográfica. São apresentadas várias variantes do problema com a ação das janelas temporais, apresentando exemplos de algumas abordagens e métodos de resolução conhecidos na literatura. No capítulo 3, formalizam-se as variantes do problema em estudo com a apresentação dos modelos em programação linear inteira mista (PLIM). No capítulo seguinte é apresentada a experiência computacional desenvolvida com a discussão e comparação dos resultados obtidos dos modelos com recurso às instâncias de referência. É particularmente considerada uma abordagem complementar no sentido de analisar a influência das janelas temporais no TSP. Por fim, no capítulo 5, as conclusões obtidas no estudo elaborado.

Capítulo 2

Planeamento de Rotas de Distribuição

A massificação dos transportes veio permitir a mobilidade de bens e de pessoas, tornando as distâncias mais curtas, alterou formas de fazer comércio e estratégias de negócio, modificou organizações e gerou um conjunto de novas oportunidades e desafios, contribuindo para a atual globalização e interligação das economias. Existe também a noção de que o forte recurso ao transporte tem efeitos negativos, em particular pelo impacto ambiental resultante da utilização intensiva do transporte rodoviário.

Neste capítulo, pretende-se primeiro caracterizar o problema, enquanto processo de decisão, do ponto de vista de uma empresa que presta serviços de transporte rodoviário de mercadorias. São referidos alguns exemplos de objetivos que poderão estar associados ao processo, mas que podem estar sujeitos a determinadas limitações, quer ao nível dos recursos próprios da empresa, quer numa perspetiva externa à mesma.

Por sua vez, pretende-se fundamentar a perceção da eficiência do planeamento de rotas através de referências a documentos e relatórios publicados por Instituições Europeias, e com perspetivas distintas sobre o tema, com o foco no transporte rodoviário de mercadorias. De seguida, é feito um enquadramento teórico do problema de planeamento de rotas de distribuição com janelas temporais, com uma breve revisão bibliográfica, sendo apresentadas diversas abordagens do problema e métodos de resolução conhecidos na literatura. Por fim, é considerado um pequeno exemplo no sentido de ilustrar a influência das janelas temporais na obtenção de uma rota de custo mínimo.

2.1 Objetivos do Planeamento de Rotas de Distribuição

O planeamento de rotas, numa perspetiva de um processo de decisão de uma empresa que presta serviços no transporte rodoviário de mercadorias, caracteriza-se por determinados objetivos que estão condicionados por limitações, quer ao nível dos recursos da própria empresa, quer por outras condicionantes externas à empresa.

A definição de uma rota está relacionada com diversos objetivos que podem estar encadeados, como o exemplo de percorrer a menor distância possível, ser mais rápida, garantir a maior satisfação possível ao cliente, permitir alcançar determinada taxa de ocupação, promover o menor impacto ambiental, etc. No entanto, há quem diga que os problemas multi-objetivo não existem, que tudo poderá ser convertido em proveitos e despesas, pelo que uma rota é comum ser definida pela sua capacidade de obter lucros ou pela obtenção de menores custos.

No planeamento de rotas existe uma série de condicionantes. Numa perspetiva interna à empresa, existe uma limitação de recursos disponíveis, quer ao nível do número de veículos e as suas capacidades, quer ao nível do número de colaboradores com determinadas características, são exemplos de recursos limitados que condicionam o planeamento das rotas. Existem também fatores externos, como é o caso das infraestruturas existentes, características associadas às cargas ou às pessoas transportadas e aspetos legislativos que tipicamente condicionam o planeamento das rotas de distribuição.

O forte recurso aos transportes produz um elevado impacto ambiental, em particular pela contribuição das emissões de CO₂ no aumento da poluição atmosférica, levando a uma legislação mais rígida por parte da comunidade europeia no combate às alterações climáticas, condicionando as decisões da empresa. Por outro lado, é necessário garantir a qualidade do serviço prestado pela empresa, relativamente ao nível de satisfação do cliente, em particular o cumprimento dos prazos de entrega e horários de visita que foram previamente acordados, pelo que esta dissertação é muito orientada para este objetivo.

2.2 Eficiência no Planeamento de Rotas

As questões da mobilidade e, designadamente, da mobilidade sustentável, são um foco generalizado, sendo fundamentais para o cumprimento das metas da Estratégia Europa 2020. No que se refere à redução das emissões de gases com efeito de estufa e ao aumento da eficiência energética, pretende-se atingir os objetivos traçados para as emissões de gases com efeito de estufa (GEE), no protocolo de Quioto [1]. Na Europa, de acordo com a EEA (*European Environment Agency*) [2], verifica-se que o setor do transporte contribuiu, em 2012, em cerca de 24,3% das emissões de GEE.

De acordo com os dados do Instituto Nacional de Estatística (INE), o modo de transporte rodoviário é o mais utilizado na União Europeia no transporte de mercadorias, representando uns significativos 73% da tonelagem total transportada em 2011 [3]. Assim, questões ambientais e de eficiência energética são cruciais, dado que se trata de um setor que depende fortemente do petróleo e dos produtos petrolíferos, que representam cerca de 96% das suas necessidades energéticas, sendo elevadas as suas emissões de CO₂. Reduzir esta dependência constitui uma necessidade ecológica e um desafio tecnológico.

A última década foi marcada por um aumento de intensidade da atividade de transporte a que correspondeu uma agenda política igualmente intensa neste setor. O alargamento da União Europeia e a crescente integração dos mercados globais fizeram aumentar os volumes de mercadorias transportadas.

Vários estudos têm sido realizados na Europa na orientação para a eficiência dos transportes. Entre 2012 e 2014, a consultora americana AECOM elaborou o relatório '*Collection and Analysis of Data on the Structure of the Road Haulage Sector in the European Union*' [4], em que recolheu e analisou informação sobre o transporte rodoviário de mercadorias na União Europeia. Este apresenta o recurso a soluções informáticas como forma de alcançar maiores níveis de eficiência e, refere que as empresas com 10 ou mais viaturas já apresentam condições para beneficiar das vantagens resultantes da implementação dessas soluções, habitualmente na ordem dos 10% a 15% de ganhos em eficiência. No relatório '*Towards a resource-efficient transport system*' [5], publicado pela Agência Europeia do Ambiente, é referida a importância de alcançar melhorias no desempenho logístico, como forma de reduzir as emissões de GEE. Ao nível do transporte rodoviário de mercadorias, são apontados como objetivos o melhoramento da utilização de viaturas, e a redução de distâncias médias percorrida, sendo ainda apontados benefícios decorrentes da consolidação de cargas.

2.3 Revisão Bibliográfica

Na presente dissertação, define-se, em síntese, o problema em estudo do seguinte modo: dado um conjunto de clientes que necessitam de ser visitados no respetivo intervalo de tempo, previamente conhecido, o *Traveling Salesman Problem with Time Windows* (TSPTW) consiste em determinar uma rota de custo mínimo, com início e fim num depósito, por forma a garantir que todos os clientes sejam visitados na respetiva janela temporal.

Nestes problemas, são conhecidos, à partida, os clientes a servir, os custos e tempos de deslocação entre cada par de clientes e entre cada cliente e o depósito, os tempos de serviço e a janela temporal de cada cliente, bem como o tempo e distância máxima da rota. Tipicamente, nestes problemas existe um *trade-off* entre visitar os clientes pelo percurso mais barato e, por outro lado, garantir que sejam respeitadas as janelas temporais de cada cliente.

Uma solução para o TSPTW descreve uma rota contendo o conjunto de clientes que devem ser visitados na respetiva janela temporal. Nestas condições, a solução deste problema será um circuito hamiltoniano. Cada solução tem um custo associado, resultante da distância total ou duração da rota a ser percorrida pelo veículo. Se a amplitude das janelas temporais for suficientemente grande, e, por isso, não forem restritivas do problema, está-se perante o clássico Problema do Caixeiro Viajante (*Travelling Salesman Problem* – TSP).

O TSP permite introduzir o problema de roteamento de veículos - *Vehicle Routing Problem* (VRP), que foi formalmente apresentado em 1959 por Dantzig e Ramser [6]. Através de um único depósito, pretende-se satisfazer a necessidade de um conjunto de clientes, que constituem pontos de procura, com recurso a uma frota ilimitada de veículos idênticos. O objetivo consiste em encontrar um conjunto de rotas (uma rota corresponde a uma viagem feita por um veículo) com um custo total mínimo.

Um grande número de variantes deste problema têm sido propostas e estudadas na literatura, pelo que hoje o VRP representa não um mas uma enorme família de problemas que apresentam o objetivo comum: a redução do número de veículos que constituem a frota de uma empresa e a obtenção de rotas ótimas. Estes problemas variam no tipo de restrições e na estrutura de custos envolvidos, de acordo com as especificidades das aplicações práticas do problema. Por exemplo: a existência de restrições ao limite da dimensão da frota de veículos e à duração das rotas;

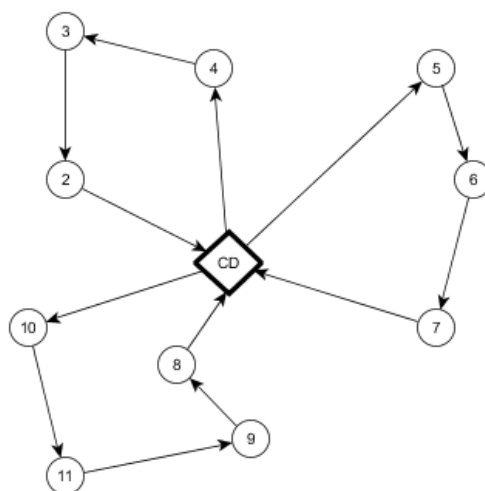


Figura 2. 1: Representação esquemática de um exemplo do VRP

imposições relacionadas com a legislação de cada país ou pela comunidade europeia; possibilidade de se considerar a existência de mais de um depósito; a utilização de frotas heterogêneas; a existência de janelas temporais e restrições de precedência associadas aos clientes; a possibilidade de existência de penalidades ao considerar determinados troços na rota; entre outros. Os livros editados em 2008 por Golden et al. [7] ou por Toth e Vigo em 2002 [8] apresentam uma revisão interessante de diversas variantes deste problema, com métodos exatos e heurísticos propostos, bem como o seu impacto económico. Na figura 2.1 é ilustrado um exemplo de uma solução para o VRP.

Muitos dos métodos desenvolvidos para o VRP são baseados nos métodos para o TSP, pelo que é normal estabelecerem-se comparações entre os resultados obtidos para os dois problemas. No entanto, é reconhecido que o VRP é mais complexo e mais difícil de resolução que o TSP. A título de exemplo, Applegate et al. em 2006 [9], desenvolveram algoritmos de *branch-and-cut* que resolvem instâncias na ordem das centenas de clientes para o TSP, no entanto, no caso do VRP, por Laporte, em 2007 [10], a dimensão da maior instância resolvida através deste procedimento foi de 135.

Por outro lado, o conhecimento de desigualdades válidas fortes, que definem convenientemente as faces do envolvente convexo do conjunto das soluções admissíveis do problema em estudo, permite um forte contributo para a eficiência dos algoritmos de *branch and cut* e de *branch and cut and price* apresentados, em 2002, por Naddef e Rinaldi [11], em 1993 por Cornuéjols e Harche [12], os trabalhos de Naddef e Rinaldi publicados em 1991 [13] e 1993 [14] e o de Araque et al. de

1990 [15]. Estes procedimentos foram reconhecidos pela comunidade científica pelo seu sucesso na abordagem exata do VRP. No entanto, são algoritmos sofisticados, de difícil implementação, o que não favorece a obtenção de boas soluções em tempo útil, pelo que também tem existido uma orientação para métodos alternativos, como o desenvolvimento de heurísticas para a resolução de situações reais.

Vehicle Routing Problem with Time Windows (VRPTW) é obtido através da adição das janelas temporais ao VRP. Com a adição das janelas temporais poderá provocar uma influência direta nas rotas, dado que cada cliente deve ser visitado no respetivo intervalo de tempo. Se o veículo chegar antes da janela temporal, o cliente não o poderá receber, pelo que terá de aguardar se for permitido tempo de espera, e não é admitida a visita ao cliente depois da janela temporal.

Solomon e Desrosiers em 1988 [17] mostraram que VRPTW e TSPTW pertencem à classe de problemas NP-difícil, por serem uma extensão do TSP, que Papadimitriou mostrou ser um problema da classe NP-difícil em 1977 [18].

Tipicamente, o número elevado de clientes combinado com a complexidade dos dados da vida real, leva com que estes problemas sejam de difícil resolução, em que não se obtém a solução ótima em tempo útil, permitindo o desenvolvimento de métodos alternativos, como o desenvolvimento de heurísticas, no sentido de se obter as melhores soluções admissíveis, mas não necessariamente ótimas, num curto espaço de tempo e com um esforço computacional reduzido. Os primeiros trabalhos de VRPTW foram baseados em heurísticas simples. Em 1987, Solomon [19] introduziu instâncias *benchmark* envolvendo 100 clientes que foram aceites como problemas *benchmark standard* pela comunidade científica envolvida em VRPTW.

2.3.1 Generalizações de VRPTW

Na literatura existem uma série de diferentes tipos de VRPTW, com restrições adicionais ou propriedades específicas que podem ser modeladas. Nesta sub-secção serão apresentadas, de modo superficial, algumas abordagens conhecidas na literatura que variam, por exemplo, na forma de permitir diferentes tipos de veículos, a utilização de mais que um depósito, veículos com multi-compartimento, o uso de janelas temporais *soft*, *hard* e *pick-up and delivery*.

2.3.1.1 Veículos de Diferentes Tipos

Os veículos podem ser diferentes de várias formas. Estes podem ser caracterizados, por exemplo, pela sua capacidade de transporte, pelos diferentes tempos e custos de viagem, pelos tempos de serviço na visita aos clientes, pela sua possibilidade de espera na visita aos clientes entre outras características. El-Sherbeny e Tuytens em 2001 [20] e Tuytens et al., em 2004 [21], apresentaram abordagens na utilização de veículos de diferentes tipos para o VRPTW com objetivos comuns de minimizar os custos totais.

2.3.1.2 Múltiplos Depósitos

Nos problemas reais pode existir a necessidade de ter mais que um depósito. Desaulniers et al., em 1997 [22] abordaram o problema que permite que os clientes possam ser servidos por vários depósitos em que cada depósito tem a sua própria frota de veículos. Este problema também pode ser considerado um problema multi-nível: primeiro os clientes são alocados a um dos vários depósitos, normalmente o mais próximo e, numa segunda fase, as rotas são projetadas de modo a ligar os clientes afetos ao mesmo depósito (Tansini e Viera, 2004 [23]). Da mesma forma, cada veículo inicia a sua rota num determinado depósito e regressa ao mesmo no fim da visita aos clientes que lhe estão afetos. O tamanho da frota de cada depósito varia entre um número mínimo e um máximo especificado. Desta forma decompõe-se um problema complexo em vários VRPTW simples, de forma a atingir o objetivo de satisfazer a procura de todos os clientes e minimizar o número de veículos, bem como a distância de todas as rotas.

2.3.1.3 Vários Compartimentos

A utilização de um ou mais compartimentos num veículo é útil quando é necessário o transporte de diferentes tipos de mercadoria que deve ser transportada em separado. Um exemplo é o caso da distribuição de produtos petrolíferos às estações de serviço, em que o camião cisterna utilizado possui várias divisões, compartimentos, no transporte de diferentes tipos de gasolina. Christiansen et al. [24], em 2015, desenvolveram um modelo de apoio à decisão para o roteamento de uma frota de

navios no abastecimento de diferentes atividades com diferentes tipos de combustível. O modelo contém janelas temporais e pretende-se minimizar a distância total percorrida, respeitando as restrições temporais estabelecidas.

Em geral, o VRPTW é um problema unidimensional, mas poderá ser estendido a um problema com restrições multidimensionais, no que diz respeito à dimensão do peso, volume ou o valor dos itens a transportar.

2.3.1.4 Janelas Temporais *hard* e *soft*

As janelas temporais dizem-se inflexíveis (*hard time window*), se o veículo necessita de esperar caso chegue ao cliente antes do início da correspondente janela temporal, ou seja, antes do cliente estar disponível para o serviço e não pode nunca chegar depois da janela temporal. As janelas temporais dizem-se flexíveis (*soft time window*) se a violação da janela temporal é permitida mas é aplicado um custo associado. Kallehauge, em 2007 [25], é um exemplo para o VRPTW.

2.3.1.5 *Pick-up and Delivery*

Esta variante permite a possibilidade de existir simultaneamente entregas e recolhas no cliente. Num problema deste tipo é assim necessário assegurar que os itens recolhidos no cliente não ultrapassem a capacidade do transporte do veículo de entrega. Esta restrição torna o problema de planeamento mais difícil, gerando por vezes uma má utilização das capacidades de transporte, um aumento das distâncias de viagem ou criando uma necessidade maior de veículos de transporte disponíveis. Por este motivo, é frequente haver apenas um ponto de partida e chegada de mercadoria, não havendo intercâmbio de bens entre clientes. Desta forma, todas as procura de entrega partem de um armazém e todas as recolhas são trazidas de volta para esse mesmo armazém (Cordeau e Laport, 2007 [26]).

Pode ainda simplificar-se o problema considerando que cada veículo deve efetuar todas as entregas, antes de iniciar as recolhas. O objetivo consiste, em geral, na minimização da frota de veículos e do tempo de viagem, tendo em consideração as restrições de capacidades dos veículos. É necessário assegurar que o veículo tem capacidade suficiente para transportar os bens, assim como aqueles que serão necessários recolher até ao armazém (Dumes et al.,1991 [27]).

2.3.2 Métodos de Resolução de VRPTW

Na resolução do VRPTW existem métodos exatos e métodos heurísticos. Como já foi referido, a maioria dos problemas de TSPTW e VRPTW pertencem à classe de problemas NP-difícil por não serem resolvidos por métodos exatos em tempo polinomial (em tempo útil). Esta situação obriga ao desenvolvimento de métodos heurísticos que, apesar de não garantirem a solução ótima, geralmente resultam em soluções sub-ótimas de boa qualidade, com um esforço computacional inferior.

Na literatura do VRPTW, é tipicamente considerado um número ilimitado de veículos que visitam os clientes e o objetivo considerado depende da natureza do problema. Nos métodos exatos, o objetivo consiste em minimizar a distância total percorrida das rotas. Nas heurísticas, tipicamente o primeiro objetivo consiste em minimizar o número de veículos em utilização e, como segundo objetivo, minimizar a distância total percorrida. Do ponto de vista computacional, quanto menor for a amplitude de uma janela temporal, maior será a sua influência na solução. Por outro lado, se todas as janelas temporais possuírem uma amplitude mais alargada, o VRPTW aproxima-se do VRP. Nesta sub-secção são apresentados alguns exemplos dos principais métodos exatos, métodos heurísticos e meta-heurísticas conhecidos na literatura.

2.3.2.1 Métodos Exatos

Kolen et al., em 1987 [28], foram dos pioneiros na implementação de um algoritmo *branch and bound* para resolução de um problema VRPTW. Baseando-se na ideia de uma enumeração inteligente das soluções candidatas a solução ótima inteira do problema, com sucessivas partições do espaço das soluções de forma a utilizar os limites superiores e inferiores para melhorar progressivamente as áreas de pesquisa, evitando assim uma procura exaustiva de todo o espaço de soluções. Este procedimento termina quando a diferença entre o limite superior e inferior é menor que a tolerância definida ϵ . Assim, com uma procura de clientes conhecida, estes são visitados por uma frota de veículos homogénea. O objetivo é determinar um conjunto de rotas, de forma a minimizar a distância total percorrida, respeitando as restrições de janelas temporais e capacidade dos veículos.

Desrochers, Desrosiers e Solomon (1992) [29] implementaram o método de geração de colunas para solução do problema VRPTW com frota homogénea. Os

autores assumiram um número de veículos ilimitado, o que faz com que o tamanho da frota seja determinado simultaneamente com as rotas. O objetivo é minimizar a distância total percorrida e utilizaram o conjunto de instâncias conhecidas na literatura, propostas por Solomon [19]. Na maior parte dos problemas com 100 clientes, não foi possível obter solução ótima.

Bard, Kontoravdis e Yu (2002) [30] desenvolveram um procedimento *branch and cut* baseado na adição de desigualdades válidas para o VRPTW com frota homogênea. O objetivo é minimizar o número de veículos necessários e a distância total percorrida, garantindo que as restrições de capacidade dos veículos e de janelas temporais sejam respeitadas. Os autores apresentam um estudo que indica que o uso destas desigualdades contribui de forma significativa para a qualidade do limite inferior produzido, especialmente para instâncias onde o número de veículos é elevado.

2.3.2.2 Métodos Heurísticos

O método heurístico é uma técnica que procura boas soluções, sem a garantia de obtenção de soluções ótimas mas que estão próximas destas, com um tempo de resolução e esforço computacional reduzido. Frequentemente, são desenvolvidas heurísticas para problemas específicos, pelo que não podem ser generalizadas a outros. Os algoritmos heurísticos que produzem rotas admissíveis são designadas por heurísticas construtivas, enquanto que os algoritmos que utilizam as rotas admissíveis e as tentam melhorar, através de trocas locais na pesquisa na sua vizinhança, são designadas por heurísticas de melhoramento.

Em 1987 Solomon [19] desenvolveu heurísticas construtivas para o VRPTW: heurística de poupança, heurística de poupança com limite de tempo de espera, heurística do vizinho mais próximo com janelas temporais, heurística de inserção I1 (com critério que minimiza o acréscimo de tempo e distância causados pela inserção de um cliente), heurística de inserção I2 (com critério que minimiza o tempo e a distância total da rota), heurística de inserção I3 (com janelas temporais). É assumida uma frota homogênea de veículos ilimitada, com restrições de capacidade. O objetivo do modelo é minimizar a distância total percorrida, além do tempo total das rotas, que inclui os tempos de espera. Solomon concluiu que a heurística de inserção I1 apresentou melhores resultados.

Por sua vez, as heurísticas de melhoramento usam a noção de vizinhança. A vizinhança de uma solução S é o conjunto $N(S)$ de soluções que são obtidas através

de uma modificação de S. Thompson e Psaraftis (1993) [31] propuseram uma heurística de melhoramento baseada na transferência cíclica (*cycle transfer*), que envolve a troca de arcos entre rotas, para resolução do VRPTW com frota homogênea. Foram estabelecidos três objetivos hierárquicos: o primeiro objetivo é minimizar o número de veículos necessários, o segundo objetivo é minimizar o tempo total das rotas, que consiste na soma dos tempos de viagem, tempo de espera e tempo de serviço. O terceiro e último objetivo é minimizar a distância total percorrida. Este procedimento foi aplicado ao conjunto de instâncias propostas por Solomon [19] e revelou-se bastante interessante, dado que obteve resultados superiores às melhores soluções obtidas por Solomon, et. al. [17].

Potvin e Rousseau (1995) [32] implementaram heurísticas de melhoramento para VRPTW, com e sem restrição de capacidade de veículos homogêneos, baseadas em r -Opt, ou seja, r arcos da solução admissível são removidos e substituídos por outros r arcos. O processo repete-se até não se conseguir melhorar a solução, ou seja, até se obter a solução r -Optimal. Com o primeiro objetivo de minimizar o número de veículos necessários e, como segundo objetivo, minimizar a duração total das rotas (soma dos tempos de viagem, tempo de espera e tempo de serviço). As soluções iniciais foram geradas pela heurística de inserção II de Solomon [19], utilizando as instâncias do mesmo autor e um conjunto de instâncias euclidianas.

Cunha, em 1997 [33] implementou heurísticas baseadas na relaxação lagrangeana para o VRPTW. São relaxadas as restrições que salvaguardam que cada cliente é visitado uma única vez. Como o problema relaxado ainda é de difícil resolução, foram desenvolvidas três heurísticas diferentes. Duas heurísticas específicas para problemas com frota homogênea, e a terceira (heurística de agrupamento e alocação sequencial) aplicada em problemas com frota heterogênea. Com base nos resultados promissores da terceira heurística desenvolvida, foi aplicada em um problema real de distribuição com um total de 136 entregas. Com esta aplicação foi possível reduzir a distância total percorrida, os custos operacionais e o número de veículos necessários.

Schulze and Fahle (1999) [34] desenvolveram uma vizinhança conhecida por *shift-sequence*, em que são obtidas novas rotas admissíveis através da troca entre clientes ou de clientes entre rotas, que conduzam a uma melhor solução. Estas heurísticas determinaram uma solução admissível muito rapidamente mas, na maioria das vezes, com valores de *gap* superiores a 10%.

2.3.2.3 Meta-heurísticas para VRPTW

Nos problemas NP-difíceis, as meta-heurísticas são poderosas técnicas para obter boas soluções. Utilizam uma combinação de escolhas aleatórias e conhecimento histórico dos resultados anteriores obtidos pelo método para procurar no espaço de pesquisa, em vizinhanças, evitando soluções que são na realidade ótimos locais. A família de meta-heurísticas mais conhecida para o VRPTW são *simulated annealing*, *tabu search* e algoritmos genéticos.

Chiang and Russell (1997) [35] desenvolveram uma meta-heurística baseada no método de *simulated annealing*. Inspirada no processo da termodinâmica, quando o metal em fusão é arrefecido de forma lenta e adequada, no sentido de se obter o resultado desejado. Neste processo a solução arbitrária inicial é substituída por uma solução próxima (na sua vizinhança no espaço de soluções), escolhida de acordo com uma função objetivo e com uma variável T (temperatura, por analogia). Quanto maior for T , maior a componente aleatória que será incluída na próxima solução escolhida. Em cada iteração, são realizados movimentos descendentes ao valor de T , mas também são permitidos pequenos movimentos ascendentes, permitindo testar soluções mais distantes da solução atual e ter mais independência do ponto inicial da pesquisa.

Por sua vez, as meta-heurísticas baseadas em *tabu search* exploram o espaço de soluções movendo-se, em cada iteração, da solução atual S para a melhor solução encontrada num subconjunto da vizinhança $V(S)$. O método *tabu search* funciona com base no pressuposto que não há qualquer sentido em rejeitar uma nova solução exceto se esse caminho já tiver sido percorrido, permitindo assim pequenos movimentos ascendentes no valor da função objetivo. Isto assegura uma maior abrangência na pesquisa no conjunto de soluções do problema, com o objetivo de evitar ótimos locais.

Em 1996, Potvin et al. [36] desenvolveram meta-heurísticas baseadas em *tabu search* para o VRPTW com frota homogênea. Com o objetivo inicial de minimizar o número de veículos necessários e, em segundo lugar, minimizar a distância total percorrida, satisfazendo a procura conhecida dos clientes de acordo com as restrições de capacidade dos veículos e janelas temporais. A solução inicial foi gerada pela heurística de inserção I1 de Solomon [19], obtendo melhores resultados. Badeau et al. (1997) [37] também implementaram um algoritmo em *tabu search* para VRPTW, com frota de veículos é homogênea e restrições de capacidade dos veículos, com vista à minimização da distância total percorrida. A vizinhança é baseada em trocas de arcos (2-opt), troca cruzada e trocas de clientes na mesma rota.

Relativamente aos algoritmos genéticos, utilizam ferramentas de pesquisa com o objetivo de evitar ótimos locais e permitir uma análise eficaz do conjunto de soluções admissíveis. Esta pesquisa é feita tendo por base o princípio da teoria da evolução das espécies, sendo essa a razão pela qual estes algoritmos pertencem à categoria de meta-heurísticas evolutivas.

Potvin e Bengio, em 1996 [38] propuseram um algoritmo genético chamado GENEROUS (GENetic ROuting System) para um problema VRPTW. Dado um depósito central para satisfazer um conjunto de clientes com procuras conhecidas e uma frota de veículos homogênea, o problema consiste em determinar um conjunto de rotas, com origem e fim no depósito, que visite todos os clientes com o menor custo possível. O primeiro objetivo é minimizar o número de veículos necessários e o segundo objetivo minimizar a duração total das rotas. A população inicial é gerada a partir da heurística de inserção II de Solomon [19] e foram utilizadas as mesmas instâncias do autor. Segundo os autores, o algoritmo produziu dos melhores resultados encontrados até ao momento, tanto em relação ao número de rotas quanto aos respetivos tempos totais.

Tan et al. (2001) [39] implementaram diversas meta-heurísticas (*tabu search*, *simulated annealing* e algoritmos genéticos) para VRPTW com frota homogênea. O objetivo é minimizar a distância total percorrida, garantindo que as restrições de capacidade, janelas temporais e duração máxima das rotas sejam respeitadas. A solução inicial foi obtida pela heurística de inserção de Solomon [19]. As meta-heurísticas foram aplicadas aos 56 problemas de Solomon e, segundo os autores, superaram ou igualaram 18 das melhores soluções encontradas na literatura.

2.4 Influência das Janelas Temporais

O facto de cada cliente necessitar de ser visitado num intervalo de tempo específico, poderá influenciar a duração e distância total da rota. Esta situação é ilustrada nas figuras 2.2 e 2.3 através um breve exemplo, respetivamente nos TSP e TSPTW, com o veículo a iniciar e a terminar a rota no depósito, representado pelo nodo 0. Cada arco representativo das figuras contém os tempos/distâncias entre os clientes e entre estes e o depósito. Os clientes que se pretende visitar são representados por nodos (restantes nodos). Estes, têm associado o instante de tempo em que é visitado (representado na forma de ()) e, no caso da figura 2.3, a respetiva janela temporal (representado por []). Pretende-se assim obter uma rota de custo mínimo de forma que o veículo visite todos os clientes uma só vez e regresse ao depósito.

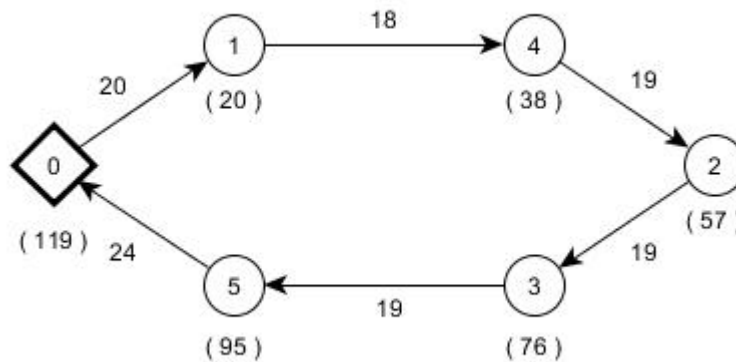


Figura 2. 2: Solução ótima para o problema TSP para uma instância com $n = 5$ clientes a visitar

Assume-se neste exemplo que o veículo tem capacidade ilimitada, que a distância é equivalente ao tempo percorrido e são permitidos tempos de espera, no intervalo de tempo entre o término da visita de determinado cliente e a chegada ao cliente que lhe sucede da rota. A função objetivo consiste na distância/duração total da rota, que se pretende minimizar.

Na figura 2.2, ilustra-se uma situação em que o veículo visita todos os clientes com a distância/duração total de percurso de 119 unidades, resultante da soma das distâncias/durações entre cada cliente e entre estes e o depósito.

No entanto, com a introdução de janelas temporais para a mesma instância, ou seja, o facto de cada cliente ser servido dentro de um determinado intervalo de tempo, poderá provocar a perda de admissibilidade desta solução. Considere-se, por exemplo, a janela temporal do cliente 3 em que deve ser visitado no intervalo de tempo [85, 138]. Na solução anterior, o cliente 3 é visitado no instante 76, que não pertence ao respetivo intervalo de tempo da janela temporal, pelo que esta solução deixa de ser admissível. Assim, a introdução de janelas temporais neste problema provoca uma alteração na sequência da visita aos clientes.

Com a introdução de janelas temporais no mesmo problema de planeamento de uma rota de distribuição (figura 2.3), a sequência de visitas aos clientes deixa de ser $0-1-4-2-3-5-0$ e passa a ser $0-2-1-4-3-5-0$. O tempo decorrido até regresso ao depósito é de 133 unidades de tempo, resultado da soma das tempos de cada cliente (soma dos arcos do grafo) e da soma dos tempos de espera necessários para cumprir as janelas temporais dos clientes 3 e 5. Por exemplo, o cliente 4 é visitado no instante 53, dentro da janela temporal previamente estabelecida [19, 126], antecedendo os clientes 3 e 5 que são visitados nos instantes

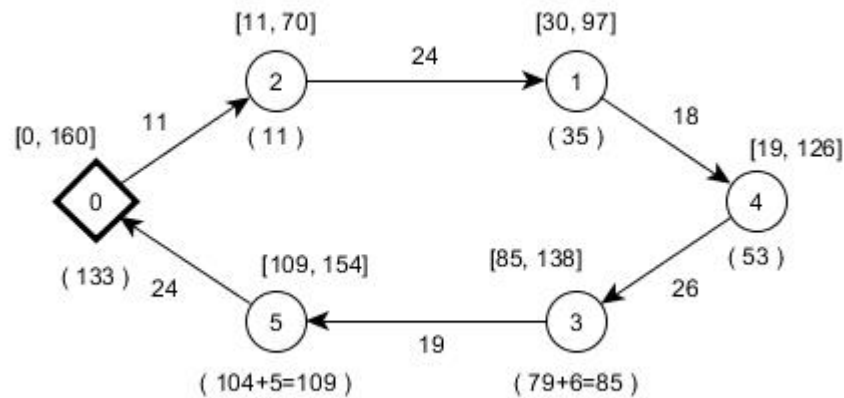


Figura 2. 3: Solução ótima para o problema TSPTW para a instância com $n = 5$ clientes a visitar nos respetivos intervalos de tempo

85 e 109, respetivamente, em que é necessário aplicar um tempo de espera de 6 e 5 unidades de forma a respeitar as respetivas janelas temporais.

É visível, assim, um aumento do tempo de regresso ao depósito do veículo no exemplo com janelas temporais, 133 unidades de tempo, quando comparado com as 119 unidades de tempo no exemplo sem a aplicação das janelas temporais. Observe-se que o veículo regressa ao depósito antes da duração máxima da rota de 160 unidades de tempo.

Relativamente à distância percorrida pelo veículo no exemplo com janelas temporais até ao regresso ao depósito foi de 122 unidades, resultante da soma de todas as distâncias entre clientes (soma dos arcos do grafo), ou seja, verifica-se um aumento de 119 para 122 unidades de distância total percorrida pelo veículo nas vertentes sem e com janelas temporais, respetivamente, o que é normal dado que se está a condicionar mais o problema original. Recorde-se que se está a assumir, sem perda de generalidade, que o tempo é equivalente à distância.

Assim, conclui-se que a necessidade de cumprir os intervalos de tempo específicos de cada cliente, poderá influenciar a sequência da visita aos clientes, a duração e a distância total percorrida da rota.

Capítulo 3

Modelos

Neste capítulo é definido o problema em estudo, TSPTW, caso particular do VRPTW, nas suas variantes, com e sem possibilidade de espera na visita aos clientes de acordo com as respetivas janelas temporais. De seguida são apresentados os modelos propostos para as variantes em estudo.

3.1 Definição do Problema

O TSPTW é definido por um grafo $G = (V, A)$, em que $V = \{0, 1, \dots, n\}$ é o conjunto dos vértices (o vértice 0 representa o depósito) e $A = \{(i, j): i, j \in V, i \neq j\}$ como o conjunto dos arcos que ligam todos os vértices. O conjunto $V_c = V \setminus \{0\}$ representa o conjunto dos clientes a serem visitados. A cada vértice $i \in V$ é associado uma janela temporal $[a_i, b_i]$, em que a_i e b_i representam, respetivamente, o início e o fim do intervalo de tempo que cada cliente $i \in V_c$ deve ser visitado. O limite inferior da janela temporal a_0 representa o instante que o veículo sai do depósito e o limite superior b_0 como o instante máximo que o veículo deverá regressar ao depósito, após visitar o conjunto V_c de clientes.

A cada ligação/arco $(i, j) \in A$ estão associados as durações (não negativas) $w_{i,j}$ e os custos $c_{i,j}$ resultantes da sua utilização. Nesta dissertação é assumido que a distância é equivalente ao tempo, ou seja, $w_{i,j} = c_{i,j}$, é considerada uma estrutura de custos assimétricos, isto é, $c_{i,j} \neq c_{j,i}$, $\forall (i, j) \in A$ e, assume-se ainda, sem perda de generalidade, que o tempo de serviço de cada cliente β_i , $\forall i \in V_c$, está incluído na correspondente duração $w_{i,k}$ $\forall k \in V$. Na variante do problema com possibilidade de espera, o veículo poderá aguardar em qualquer instante compreendido no intervalo de tempo de visita entre dois clientes consecutivos.

No conjunto dos arcos A , apenas se consideram os arcos que satisfazem a condição (3.1), de forma a assegurar que apenas estão presentes os arcos que satisfazem as janelas temporais associadas:

$$a_i + w_{ij} \leq b_j \quad \forall i, j \in V, i \neq j \quad (3.1)$$

É assumido que o veículo possui capacidade ilimitada, pelo que uma rota admissível é uma rota elementar (não repete vértices) de cardinalidade $|V_c| + 1$.

Quando o veículo chega ao cliente i , $i \in V_c$, só pode iniciar o serviço se o correspondente instante t_i for maior ou igual ao limite inferior da janela temporal a_i e menor ou igual ao limite superior da janela temporal b_i . Por outro lado, na variante em que é permitido tempos de espera, se o veículo chegar antes do início da janela temporal, terá de aguardar. Depois de iniciar o serviço no instante s_i , este é concluído após o tempo de serviço específico β_i . Este problema é ilustrado na figura 3.1.

No TSPTW pretende-se encontrar uma solução admissível de menor custo total em G , garantindo que cada cliente seja visitado uma única vez, no respetivo intervalo de tempo. As variantes em estudo consistem na minimização da distância total percorrida, minimização da duração da rota com e sem tempos de espera. Nesta última variante, sem tempos de espera, os dois objetivos, minimizar distância total ou minimizar duração da rota são equivalentes, produzindo as mesmas soluções, dado que se está a assumir, nesta dissertação, que o tempo é equivalente à distância.

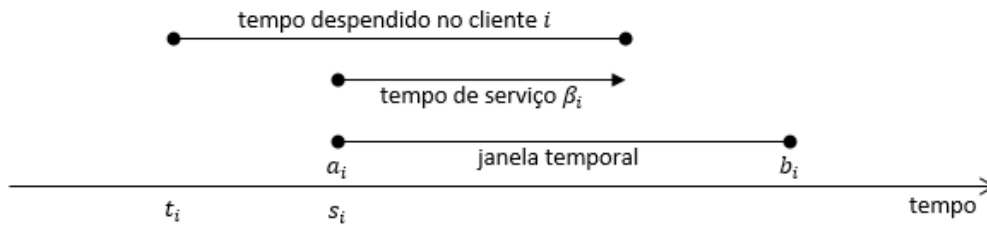


Figura 3. 1: Ilustração da visita a um cliente, com possibilidade de espera

3.2 Formulações

Nesta sub-secção são apresentadas as formulações, em PLIM, desenvolvidas no âmbito da presente dissertação, para modelar as variantes do TSPTW em estudo. Os modelos são: o modelo com janelas temporais baseado nas restrições Miller-Tucker-Zemlin (MTZ) [40] e o Modelo de Fluxo Agregado (MFA) com janelas temporais.

O modelo MTZ inclui variáveis nodo em que se associa a informação tempo em cada nodo, enquanto que, o modelo MFA inclui variáveis arco em que se associa a informação tempo para cada arco. Em ambas as formulações, utilizam-se modelos de fluxo para garantir a conexidade das soluções obtidas.

3.2.1 Modelo Miller-Tucker-Zemlin Com Tempos de Espera

O modelo MTZ com janelas temporais, na variante em que são permitidos tempos de espera, é formulado para os objetivos de minimização da distância total percorrida e minimização da duração da rota, respetivamente nas sub-secções 3.2.1.1 e 3.2.1.2.

3.2.1.1 Minimizar a Distância Total Percorrida

O modelo MTZ, com objetivo de minimizar a distância total percorrida, considera dois conjuntos de variáveis. As variáveis binárias de decisão $x_{i,j}$, $\forall (i,j) \in A$, tomam o valor 1 se o arco (i,j) está na solução e 0 caso contrário. As variáveis não negativas T_i , $i \in V_c$, indicam o instante de início do serviço no cliente i , e a variável T_0 indica o instante de regresso ao depósito. Como já foi referido, pretende-se obter uma rota com início no depósito, no instante a_0 , visitar exatamente o conjunto de clientes V_c no intervalo de tempo específico a cada cliente, e regressar ao depósito até ao instante limite b_0 . O modelo MTZ com possibilidade de espera é formulado da seguinte forma:

$$\text{Minimizar } \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \quad (3.2)$$

$$\text{Sujeito a: } \sum_{i \in V} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in V \quad (3.3)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in V \quad (3.4)$$

$$T_i + w_{ij} - T_j \leq M(1 - x_{ij}) \quad \forall (i,j) \in A \quad (3.5)$$

$$a_i \leq T_i \leq b_i \quad \forall i \in V \quad (3.6)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A \quad (3.7)$$

$$T_i \geq 0 \quad \forall i \in V \quad (3.8)$$

A função objetivo da presente formulação (3.2) minimiza a distância total da rota. As restrições (3.3) e (3.4) – designadas por restrições de afetação – garantem que um e só um arco incide em cada vértice e que um e só um arco diverge em cada vértice, respetivamente, garantido que cada cliente é visitado uma única vez.

As restrições (3.5), juntamente com as janelas temporais do problema, garantem a eliminação de sub-circuitos na solução e asseguram a admissibilidade do horário temporal. Se o arco $(i,j) \in A$ está na solução, ou seja se $x_{ij} = 1$, então o instante de visita a um determinado cliente é maior ou igual ao instante de visita do cliente que lhe antecede, acrescido do intervalo de tempo entre ambos. Estas restrições utilizam uma constante M , suficientemente grande, que permite garantir a validade das restrições, quando o arco não está na solução. Em termos da resolução do modelo, quer ao nível da obtenção da solução de relaxação linear, quer ao nível da obtenção da solução ótima, é importante que este valor de M seja o menor possível. Assim, no caso particular deste problema, esta constante é definida para o modelo da seguinte forma [40]:

$$M_{ij} = \max\{b_i + w_{ij} - a_j, 0\} \quad (3.9)$$

As restrições (3.6) asseguram que cada cliente é servido dentro da correspondente janela temporal estabelecida, bem como é assegurado que o veículo regressa ao depósito o mais tardar no instante máximo previsto para a duração da rota. Por fim, as restrições (3.7) e (3.8) definem o domínio das variáveis do modelo.

3.2.1.2 Minimizar a Duração da Rota

Além da variante com o objetivo de minimizar a distância total percorrida da rota, cujo o modelo foi discutido da sub-seção anterior, também se pretende estudar o problema com um novo objetivo que consiste na minimização da duração da rota, ou seja na minimização do instante de regresso ao depósito.

Esta variante poderá ser formulada a partir do modelo MTZ apresentado anteriormente, com a adição de uma variável não negativa L , com a substituição da função objetivo (3.2) por (3.10) e pela adição das restrições (3.11). O modelo MTZ com o objetivo de minimizar a duração da rota é então dado por:

$$\text{Minimizar } \sum_{j \in V_c} w_{j0} x_{j0} + L \quad (3.10)$$

Sujeito a: (3.3) – (3.18)

$$T_i \leq L \quad \forall i \in V_c \quad (3.11)$$

As restrições (3.11) garantem que a variável L representa o instante de visita ao último cliente da rota. Por sua vez, a função objetivo (3.10) corresponde ao instante de regresso ao depósito, dado pela soma do instante de visita ao último cliente da rota com o intervalo de tempo entre este cliente e o depósito, ou seja a duração da rota, que se pretende minimizar.

Note-se que a adoção das restrições (3.11) e da função objetivo (3.10), em conjunto com as janelas temporais do problema, tornam o modelo mais forte e, por sua vez, permitem uma melhor solução da relaxação linear. As restantes restrições são análogas ao modelo MTZ.

3.2.2 Modelo Miller-Tucker-Zemlin Sem Tempos de Espera

Nesta sub-secção formaliza-se a variante do estudo em que não é permitido tempo de espera nas deslocações aos clientes, ou seja, o veículo não poderá esperar e visitar cada cliente exatamente no período considerado da janela temporal. Uma forma de modelar este problema, utilizando as restrições Miller-Tucker-Zemlin, consiste no seguinte:

$$\text{Minimizar } \sum_{j \in V_c} w_{j0} x_{j0} + L \quad (3.10)$$

$$\text{Sujeito a: } (3.3) - (3.4) + (3.6) - (3.8) + (3.11)$$

$$T_i - T_j + Mx_{ij} + (M - c_{ij} + \min\{-c_{ji}, b_j - a_i\})x_{ji} \leq M - c_{ij} \\ \forall i, j \in V_c \quad (3.12)$$

No modelo MTZ sem possibilidade de espera, a função objetivo (3.10) minimiza a duração da rota.

As restrições do modelo são análogas ao modelo MTZ, formalizado na sub-secção anterior, com a exceção das restrições (3.5) que são substituídas pelas restrições (3.12), propostas por Martin Desrochers e Gilbert Laporte [41]. As restrições (3.12) diferem das restrições (3.5) na medida em que não permitem a possibilidade de tempos de espera, ou seja, garantem que o instante da visita de cada cliente é dado exatamente pelo instante de visita do cliente que lhe antecede na rota, acrescido da duração do percurso entre ambos os clientes. Estas restrições, à semelhança do que foi feito nas restrições (3.5), utilizam as mesmas constantes definidas em (3.9).

3.2.3 Modelo de Fluxo Agregado Com Tempos de Espera

Nesta sub-secção, é apresentado o MFA com janelas temporais, na variante em que são permitidos tempos de espera, com os objetivos de minimização da distância total percorrida e minimização da duração da rota, respetivamente nas sub-secções 3.2.3.1 e 3.2.3.2.

3.2.3.1 Minimizar a Distância Total Percorrida

O MFA proposto considera dois conjuntos de variáveis. As variáveis binárias de decisão x_{ij} , $\forall (i, j) \in A$, que tomam o valor 1 se o arco (i, j) está na solução e 0 caso contrário. As variáveis não negativas y_{ij} , $\forall (i, j) \in A$, indicam o instante/distância percorrida na rota até ao nodo j , $\forall j \in V$. Recorde-se que se pretende obter uma rota com início no depósito no instante a_0 , visitar exatamente V_c clientes no intervalo de tempo específico de cada cliente, e regressar ao depósito o mais tardar no instante limite b_0 . São permitidos intervalos de tempo de espera na visita aos clientes. O MFA com possibilidade de espera é formulado da seguinte forma:

$$\text{Minimizar } \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \quad (3.13)$$

Sujeito a: (3.3) + (3.4)

$$\sum_{j \in V} y_{1j} = \sum_{j \in V} w_{1j} x_{1j} \quad (3.14)$$

$$\sum_{i \in V} y_{ij} + \sum_{k \in V} w_{jk} x_{jk} \leq \sum_{k \in V} y_{jk} \quad \forall j \in V_c \quad (3.15)$$

$$y_{ij} \leq M x_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \quad (3.16)$$

$$a_j \leq \sum_{i \in V} y_{ij} \leq b_j \quad \forall j \in V_c \quad (3.17)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i, j) \in A \quad (3.18)$$

$$y_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A \quad (3.19)$$

A função objetivo (3.13) minimiza a distância total da rota.

Por sua vez, à semelhança do modelo MTZ, o MFA também utiliza as mesmas restrições de afetação (3.3) e (3.4). A restrição (3.14) representa o primeiro cliente da rota a ser visitado.

Relativamente às restrições de conservação de fluxo (3.15) garantem que o instante e/ou a distância percorrida da rota até visitar o cliente $j, \forall j \in V_c$, acrescido da duração e/ou a distância entre cliente j e o cliente $k, \forall k \in V_c$, é menor ou igual ao instante e/ou a distância percorrida da rota até visitar o cliente k . Estas restrições, na forma de inequação (\leq), possibilitam que o veículo possa esperar quando chega mais cedo que o início da janela temporal de determinado cliente sucessor na rota.

As restrições (3.16) estabelecem a ligação entre a variável contínua y com a variável binária de decisão x , pelo que garantem que $y_{i,j} = 0, \forall i, j \in V$, sempre que $x_{i,j} = 0, \forall i, j \in V$. Dado o domínio das variáveis x e y , na ligação entre estas, é utilizada uma constante M , suficientemente grande, para que a restrição seja sempre satisfeita.

No que diz respeito às restrições (3.17), asseguram que o tempo de chegada a cada cliente $j, \forall j \in V_c$ está compreendido entre o intervalo de tempo $[a_j, b_j]$ previamente definido, em que a_j e b_j representam, respetivamente, o limite inferior e superior da janela temporal de cada cliente. As restrições (3.18) e (3.19) definem o domínio das variáveis do modelo.

O valor atribuído à constante M , utilizada nas restrições (3.16), deverá ser o menor possível, de forma a tornar mais eficiente o processo de obtenção da solução ótima, bem como a resolução da relaxação linear. Dado que o instante máximo de visita a cada cliente $j, \forall j \in V_c$, é o valor da janela temporal b_j previamente estabelecido, o melhor valor que poderá ser atribuído à constante M utilizada na formulação é b_j . Assim, as restrições (3.16) podem ser “apertadas” permitindo deduzir as seguintes restrições:

$$a_j x_{ij} \leq y_{ij} \leq b_j x_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \quad (3.20)$$

Repare-se que $a_j \sum_{i \in V} x_{ij} \leq \sum_{i \in V} y_{ij}, \forall j \in V_c$, é equivalente a $a_j \leq \sum_{i \in V} y_{ij}, \forall j \in V_c$, dado que $\sum_{i \in V} x_{ij} = 1, \forall j \in V_c$, (3.3) e, da mesma forma vem que $\sum_{i \in V} y_{ij} \leq b_j \sum_{i \in V} x_{ij}, \forall j \in V_c$, é equivalente a $\sum_{i \in V} y_{ij} \leq b_j, \forall j \in$

V_c , dado que $\sum_{i \in V} x_{ij} = 1, \forall j \in V_c$, (3.3). Assim, as restrições (3.17) tornam-se redundantes e podem ser removidas.

As restrições (3.20) permitem substituir as restrições (3.16) e (3.17) do MFA e tornar o modelo mais forte, contribuindo para um valor de *gap* da relaxação linear mais reduzido. Relativamente à solução ótima também permite que seja obtida mais rapidamente.

3.2.3.2 Minimizar a Duração da Rota

Considerando o objetivo de minimizar a duração da rota, esta variante poderá ser formulada através do MFA, formalizado anteriormente, com a substituição da função objetivo (3.13) pela (3.21), mantendo as restrições consideradas.

$$\text{Minimizar } \sum_{i \in V_c} y_{i0} \quad (3.21)$$

$$\text{Sujeito a: } (3.3) + (3.4) + (3.14) + (3.15) + (3.18) - (3.20)$$

A função objetivo (3.21), minimiza a duração da rota, ao minimizar o instante de regresso ao depósito. As restantes restrições são análogas ao modelo MFA apresentadas na sub-secção anterior.

3.2.4 Modelo de Fluxo Agregado Sem Tempos de Espera

A variante do estudo em que não são permitidos tempos de espera nas deslocações aos clientes, é modelada através de uma transformação do MFA apresentado anteriormente. O MFA sem tempos de espera é modelado da seguinte forma:

$$\text{Minimizar } \sum_{i \in V_c} y_{i0} \quad (3.21)$$

Sujeito a: (3.3) + (3.4) + (3.14) + (3.18) – (3.20)

$$\sum_{i \in V} y_{ij} + \sum_{k \in V} w_{jk} x_{jk} = \sum_{k \in V} y_{jk} \quad \forall j \in V_c \quad (3.22)$$

A função objetivo (3.21), à semelhança da sub-secção anterior, minimiza a duração da rota.

As restrições são análogas ao MFA formalizado anteriormente com a exceção das restrições (3.15), que são substituídas pelas restrições de conservação de fluxo (3.22). As restrições (3.22) diferem das restrições (3.15) na medida em que não permitem a possibilidade de tempos de espera nas deslocações aos clientes, ou seja, garantem que o instante e/ou a distância percorrida da rota até visitar o cliente j , $\forall j \in V_c$, acrescido da duração e/ou a distância entre cliente j e o cliente k , $\forall k \in V_c$, é exatamente igual ao instante e/ou a distância percorrida da rota até visitar o cliente k . Estas restrições, satisfeitas na igualdade, não permitem a existência de intervalos de tempo de espera na visita aos clientes.

3.2.5 Desigualdades Válidas

Ao adicionar desigualdades válidas aos modelos MTZ e MFA, é possível obter novos modelos que, embora sejam equivalentes aos modelos originais em termos de obtenção da solução ótima inteira, permitem obter soluções de relaxação linear mais próximos do valor ótimo. As desigualdades válidas adicionais, não fazem parte do problema original, mas permitem fortalecer os modelos na pesquisa de soluções, através do corte da região admissível do problema, mantendo todas as soluções inteiras admissíveis.

Na realidade, as restrições (3.20) apresentadas anteriormente, fortalecem o modelo MFA, pelo que a sua adição permite que sejam consideradas como desigualdades válidas. Além disso, as desigualdades válidas adicionais introduzidas são do tipo:

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad S \subseteq V \setminus \{1\} \quad (3.23)$$

As desigualdades válidas adicionais apresentadas (3.23) permitem melhorar a qualidade da solução da relaxação linear dos modelos, nas variantes em estudo. Para que o tempo computacional do cálculo da relaxação linear com desigualdades válidas adicionais não aumente exponencialmente, nesta dissertação é considerado o seguinte conjunto de valores de $|S| = 2$ e 3 .

Capítulo 4

Experiência Computacional

Neste capítulo começam por ser apresentadas as instâncias de referência que serão utilizadas como as instâncias de teste nesta dissertação. De seguida, é dedicada uma sub-secção à apresentação dos valores ótimos das instâncias consideradas para os três objetivos em estudo. Posteriormente, é apresentada a experiência computacional realizada no âmbito desta dissertação. Todos os resultados apresentados são comentados.

Os resultados, com a exceção dos valores ótimos, são apresentados de forma sintetizada, pelo que todos os resultados obtidos estão disponíveis em anexo para consulta.

Para efeitos de comparação dos modelos em estudo, é considerado um tempo computacional máximo de 2 horas de processamento. Todos os resultados apresentados foram obtidos com recurso ao *software* IBM ILOG CPLEX *Optimization Studio* 12.6.2 e com um computador com o processador Intel® Core™ 2 Duo CPU E7500 @ 2.93GHz, com 4GB de RAM.

4.1 Instâncias

As instâncias de referência utilizadas nesta dissertação foram propostas por Dumas et al. [42] e encontram-se disponíveis na página *online* [43]. As instâncias utilizadas são baseadas em distâncias euclidianas que satisfazem a propriedade da desigualdade triangular, com a posição arbitrária do depósito face aos clientes.

Para um determinado número de clientes $n = |V_c|$ e uma determinada amplitude de janela temporal w associada, em unidades de tempo, existem 5 instâncias distintas, geradas com o mesmo gerador. Nesta dissertação são utilizadas 70

instâncias, que correspondem às 5 instâncias para cada par (n, w) , com $n \in \{20, 40, 60, 80, 100, 150, 200\}$ e $w \in \{20, 60\}$. Assim, uma instância é caracterizada pelo terno $|V_c|. |W|. i$ (numero de clientes, amplitude da janela temporal em unidades de tempo e o número da instância). Os ficheiros das instâncias, com o formato *txt*, possuem $n + 1$ linhas que representam a matriz assimétrica de tempos/distâncias entre cada par de clientes i e j e entre cada cliente e o depósito, mais o tempo de serviço do cliente j . As últimas $n + 1$ linhas representam as janelas temporais (instantes mínimo e máximo) para cada cliente, uma linha por cliente, bem como a do depósito. O primeiro elemento é o depósito.

4.3 Valores Obtidos

Não são conhecidos os valores ótimos de todas as instâncias de teste consideradas nesta dissertação, mas sim o valor das melhores soluções conhecidas até ao momento. Estas, são obtidas, na grande maioria, por métodos heurísticos. Estas soluções estão disponíveis na página *online* [43] e são relativas à variante do problema que consiste na minimização da distância total percorrida, com tempos de espera. Estes valores poderão ser observados na tabela 4.1, sendo feita uma comparação com os valores ótimos obtidos no âmbito desta dissertação.

Por sua vez, a tabela 4.2 apresenta os valores ótimos das instâncias de referência com o objetivo de minimizar a duração da rota, com tempos de espera, e, na tabela 4.3, são apresentados os valores ótimos com o objetivo de minimizar a duração da rota, sem tempos de espera. Nestes dois últimos objetivos não eram conhecidas, até ao momento, soluções na literatura das instâncias de referência.

Dado que nesta dissertação é considerado um limite máximo de tempo de processamento de 2 horas, os valores ótimos para cada instância, presentes nas tabelas 4.1, 4.2 e 4.3, foram obtidos com recurso ao modelo em estudo a partir do qual o tempo necessário para obter a solução ótima é menor. No entanto, existem instâncias em que não foi possível obter solução ótima no tempo considerado, sendo apresentada a melhor solução encontrada (representada por *) com o respetivo valor de *gap*. Existem também instâncias em que não foi possível obter solução inteira no período máximo de processamento considerado (representada com **). Neste caso, observou-se que nos objetivos de minimizar a duração da rota com e sem tempos de espera, os limites inferiores obtidos são exatamente iguais nos modelos MTZ e MFA, após as 2 horas de processamento.

Observou-se também, em diversas instâncias, que quando apenas um dos modelos permite obter a solução ótima, num tempo computacional inferior a 2 horas, o limite inferior obtido pelo outro modelo no final do tempo limite coincide com o respetivo valor ótimo, pelo que, frequentemente, o *software* utilizado encontra rapidamente soluções não inteiras com valor igual ao correspondente valor ótimo mas não a solução ótima. Esta situação mantém-se com a alteração das regras de ramificação da árvore de *branch-and-bound*, como por exemplo o *depth-first search*. Assim, nas tabelas 4.2 e 4.3, nas instâncias em que nenhum modelo obteve solução inteira, é apresentado o limite inferior obtido pelos dois modelos, na expectativa de que este seja o valor ótimo ou estar muito próximo dele.

Neste processo, adotou-se o símbolo \hat{V} para representar o valor ótimo. Em particular na tabela 4.1, é utilizada o símbolo L para representar o valor da melhor solução conhecida da literatura para cada instância. Nas tabelas 4.2 e 4.3, é considerada o símbolo $L.I.$ para representar o limite inferior obtido. No caso da tabela 4.3, o facto de não serem permitidos tempos de espera, leva a que não seja possível obter a solução em algumas das instâncias de referência, por se tornar num problema impossível. Esta situação verifica-se em diversas instâncias com uma amplitude de janelas temporais de 20 unidades de tempo ($w20$) e está representada na tabela 4.3 como *imp*.

Assim, considere-se cada par definido por $(|V_c|, |W|)$, com $|V_c| \in \{20, 40, 60, 80, 100, 150, 200\}$ e $|W| \in \{20, 60\}$. Não é considerado o problema $(200, 60)$ devido às instâncias não estarem disponíveis na literatura.

A média dos tempos, em segundos, dos problemas em que se obteve o valor ótimo nas 5 instâncias da cada par $(|V_c|, |W|)$, podem ser observados nas tabelas 4.4, 4.6 e 4.8 presentes nas sub-seções seguintes, nas três variantes consideradas.

Tabela 4. 1: Comparação dos valores ótimos com os valores da literatura, com o objetivo de minimizar distância total percorrida, com tempos de espera

$ V_c \cdot W $	i	\hat{V}	GAP	L	$ V_c \cdot W $	i	\hat{V}	GAP	L
20, 20	1	378		378	20, 60	1	335		335
	2	286		286		2	244		244
	3	394		394		3	352		352
	4	396		396		4	280		280
	5	352		352		5	338		338
40, 20	1	497		500	40, 60	1	494		494
	2	552		552		2	470		470
	3	478		478		3	393		408
	4	404		404		4	382		382
	5	499		499		5	328		328
60, 20	1	551		551	60, 60	1	609		609
	2	605		605		2	566		566
	3	532		533		3	485		485
	4	616		616		4	571		571
	5	603		603		5	569		569
80, 20	1	616		616	80, 60	1	554		554
	2	736		737		2	628		633
	3	667		667		3	649		651
	4	615		615		4	612 *	6.27%	619
	5	748		748		5	**		575
100, 20	1	738		738	100, 60	1	**		655
	2	714		715		2	**		659
	3	762		762		3	**		744
	4	799		799		4	**		764
	5	768		774		5	661		661
150, 20	1	925		918	150, 60	1	**		859
	2	864		864		2	**		782
	3	832		834		3	**		793
	4	873		854		4	**		819
	5	836		846		5	**		840
200, 20	1	1020 *	2.14%	1016					
	2	**		958					
	3	1042		1046					
	4	984		984					
	5	1020		1014					

Tabela 4. 2: Valores obtidos para as instâncias de referência com o objetivo de minimizar a duração da rota, com tempos de espera

$ V_c \cdot W $	i	\hat{V}	GAP	$L.I.$	$ V_c \cdot W $	i	\hat{V}	GAP	$L.I.$
20, 20	1	387			20, 60	1	400		
	2	296				2	300		
	3	403				3	381		
	4	401				4	337		
	5	365				5	392		
40, 20	1	520			40, 60	1	535		
	2	607				2	509		
	3	514				3	465		
	4	442				4	475		
	5	520				5	423		
60, 20	1	586			60, 60	1	722		
	2	656				2	715		
	3	593				3	**		619
	4	670				4	623 *	2.5%	
	5	629				5	669		
80, 20	1	729			80, 60	1	**		674
	2	798				2	733		
	3	727				3	743		
	4	694				4	718		
	5	793				5	**		682
100, 20	1	827			100, 60	1	**		824
	2	801				2	**		782
	3	834				3	**		856
	4	828				4	**		834
	5	825				5	**		790
150, 20	1	**		1034	150, 60	1	**		1024
	2	967				2	**		940
	3	959				3	**		984
	4	975				4	**		998
	5	957				5	**		997
200, 20	1	**		1139					
	2	**		1124					
	3	**		1178					
	4	**		1125					
	5	**		1123					

Tabela 4. 3: Valores obtidos para as instâncias de referência com o objetivo de minimizar a duração da rota, sem tempos de espera

$ V_c \cdot W $	i	\hat{V}	GAP	$L.I.$	$ V_c \cdot W $	i	\hat{V}	GAP	$L.I.$
20, 20	1	<i>imp.</i>			20, 60	1	400		
	2	<i>imp.</i>				2	300		
	3	406				3	381		
	4	<i>imp.</i>				4	337		
	5	<i>imp.</i>				5	393		
40, 20	1	523			40, 60	1	535		
	2	607				2	509		
	3	514				3	465		
	4	<i>imp.</i>				4	475		
	5	<i>imp.</i>				5	423		
60, 20	1	<i>imp.</i>			60, 60	1	722		
	2	656				2	715		
	3	593				3	623		
	4	<i>imp.</i>				4	**		621
	5	629				5	669		
80, 20	1	<i>imp.</i>			80, 60	1	**		674
	2	<i>imp.</i>				2	**		733
	3	<i>imp.</i>				3	**		743
	4	<i>imp.</i>				4	**		718
	5	<i>imp.</i>				5	**		695
100, 20	1	827			100, 60	1	**		824
	2	801				2	**		782
	3	<i>imp.</i>				3	**		856
	4	828				4	**		834
	5	825				5	**		790
150, 20	1	**		1034	150, 60	1	**		1024
	2	967				2	**		940
	3	<i>imp.</i>				3	**		984
	4	**		975		4	**		998
	5	<i>imp.</i>				5	**		997
200, 20	1	**		1140					
	2	**		1124					
	3	**		1178					
	4	**		1125					
	5	**		1123					

4.4 Comparação dos Modelos

Para comparar os modelos em estudo, em termos da eficiência da obtenção das soluções ótimas e na qualidade da respetiva relaxação linear, foram feitos diversos testes computacionais presentes nas sub-secções seguintes. A comparação dos modelos MTZ e MFA é feita com recurso à resolução das instâncias de referência, nas variantes de minimização da distância total percorrida com tempos de espera, minimização da duração da rota com e sem tempos de espera, bem como a minimização da distância total percorrida com limite máximo de visita a cada cliente.

Os testes computacionais desenvolvidos são apresentados nas tabelas seguintes, de forma sintetizada, através do cálculo da média das instâncias de cada problema. Todos os resultados obtidos estão disponíveis em anexo para consulta.

As tabelas apresentadas referem-se à obtenção da solução ótima e à resolução da relaxação linear, com e sem desigualdades válidas adicionais, para cada problema, e estão divididas em duas partes que representam os modelos MTZ e MFA em estudo.

No caso das tabelas referentes à obtenção das soluções ótimas, a primeira coluna caracteriza o problema (conjunto de 5 instâncias obtidas pelo mesmo gerador) de cada par $(|V_c|, |W|)$. As colunas designadas por **Tempo** referem-se ao tempo médio para a obtenção da solução ótima do problema. Por sua vez, as colunas com o nome de **GAP^{RRB}** são referentes ao valor de *gap* correspondente à diferença entre o valor ótimo do problema com o *Root Relaxation Bound* (RRB), ou seja, o primeiro limite inferior obtido pelo CPLEX, que poderá ser obtido através da resolução da relaxação linear ou por métodos heurísticos. Com estas colunas, pretende-se avaliar o pré-processamento do *software* CPLEX aplicado em cada formulação. As colunas com o nome **T.E.**, são referentes à percentagem do tempo total da rota em que o veículo sem encontra em espera na visita aos seus clientes e, por fim, as colunas designadas por **#S.O.**, são relativas ao número de instâncias resolvidas, das 5 instâncias de cada problema, por cada formulação, de acordo com o tempo limite considerado.

Na variante do problema sem tempos de espera, a coluna com o nome **#Imp.** está relacionada com o número de instâncias impossíveis de cada problema, ou seja, o número de instâncias para as quais não se consegue visitar todos os clientes, dentro da respetiva janela temporal, sem que o veículo tenha que esperar.

As tabelas referentes à resolução da relaxação linear dos modelos MTZ e MFA, nas variantes em estudo, estão divididas entre os resultados da relaxação linear com e sem desigualdades válidas (**D.V.**) para cada formulação. Assim, além da primeira coluna que caracteriza o problema de cada par $(|V_c|, |W|)$, as colunas designadas por **LP** referem-se à correspondente solução da relaxação linear. As colunas designadas

por **Tempo**, indicam o tempo de obtenção solução da relaxação linear e, por fim, as colunas referenciadas por **GAP** representam o valor de *gap* da correspondente solução.

4.4.1 Minimizar a Distância Total Percorrida Com Tempos de Espera

Considerando a variante que consiste na minimização da distância total percorrida com possibilidade de espera, os resultados computacionais estão presentes na tabela 4.4. Na análise desta tabela, verifica-se que a formulação MTZ obtém as soluções ótimas em menos tempo, para os diversos problemas, permitindo a resolução do maior número de instâncias, quando comparado com o MFA. Observe-

Tabela 4. 4: Comparação dos modelos MTZ e MFA com o objetivo de minimizar a distância total percorrida, com tempos de espera

$ V_c \cdot W $	Miller – Tucker – Zemlin				Modelo de Fluxo Agregado			
	Tempo	GAP^{RRB}	T.E.	#S.O.	Tempo	GAP^{RRB}	T.E.	#S.O.
20,20	0.11	3.3%	5.7%	5/5	0.06	0.7%	6.2%	5/5
20,60	0.11	12.6%	18.4%	5/5	0.55	12.1%	21.7%	5/5
40,20	0.11	6.1%	9.2%	5/5	0.59	3%	9.3%	5/5
40,60	6.42	20%	19.2%	5/5	50.19	17.8%	22.8%	5/5
60,20	0.38	4.9%	8.8%	5/5	5.38	5.1%	9.2%	5/5
60,60	21.6	16.6%	20.1%	5/5	663.6	14.7%	19.8%	4/5
80,20	0.78	7.4%	10.7%	5/5	20.08	7.3%	11.5%	5/5
80,60	3067	14.3%	17.3%	3/5	398.4	16.1%	21.5%	2/5
100,20	6.24	8.3%	9.1%	5/5	1079.1	7.7%	9.2%	5/5
100,60	56.36	15%	22.2%	1/5	1230.2	14.3%	22.2%	1/5
150,20	157.2	9.3%	12.5%	5/5	803.4	6.8%	13.5%	2/5
150,60	> 7200	18.2%		0/5	> 7200	17.3%		0/5
200,20	468.5	12.6%	11.7%	3/5	> 7200	11.2%		0/5

-se que é capaz de obter a solução ótima no problema com 200 clientes, com um tempo computacional inferior a 500 segundos, enquanto que o modelo MFA não o conseguiu em 7200 segundos.

Relativamente aos valores de *gap* do RRB, verifica-se que o pré-processamento do CPLEX, juntamente com as janelas temporais do TSPTW, permitem obter bons limites inferiores. Estes estão mais próximos do respetivo valor ótimo quanto menor for a amplitude das janelas temporais. Note-se que nos problemas (150,60) e (200,20) (este último no caso do MFA) o valor de *gap* do RRB foi obtido utilizando as soluções disponibilizadas na literatura.

Para analisar o valor de *gap* do RRB com o aumento do valor de n , é disponibilizada a figura 4.1, que mostra o comportamento do pré-processamento do *software* CPLEX nos modelos MTZ e MFA, nas amplitudes de 20 e 60 unidades de tempo das janelas temporais.

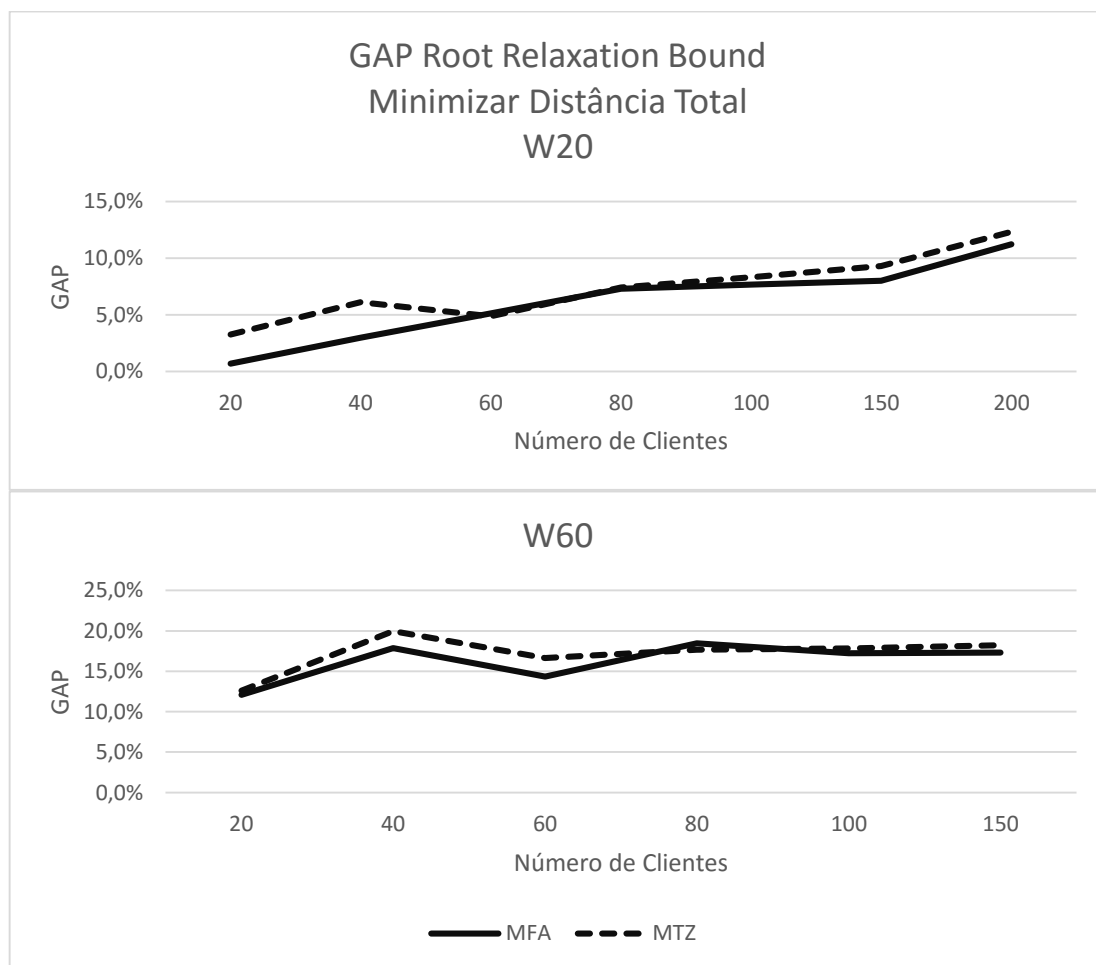


Figura 4. 1: Comparação dos valores de gap do RRB, com 20 e 60 unidades de tempo de amplitude para as janelas temporais

Observado a evolução individual do valor de *gap* do RRB dos modelos MTZ e MFA, para os problemas com janelas temporais de 20 unidades de tempo de amplitude, presente na figura 4.1, verifica-se que este aumenta com o aumento do número de clientes, como seria espectável. Assim, com o aumento da dimensão do problema, mais distante se torna este valor heurístico do verdadeiro valor ótimo. Não se verificam diferenças significativas destes valores *gap* do RRB entre os modelos MTZ e MFA, com a exceção de problemas de dimensão inferior a 60 clientes, em que os valores de *gap* do RRB são superiores na formulação MTZ.

Quando a amplitude das janelas temporais aumenta para 60 unidades de tempo, o valor de *gap* do RRB dos modelos MTZ e MFA tende a ser constante com o aumento do número de clientes, não se verificando diferenças significativas entre eles. Com esta observação verifica-se que existem evidências para afirmar que, no objetivo de minimizar a distância total percorrida com tempos de espera, o pré-processamento do CPLEX nos dois modelos apresenta um valor que, em média, está sensivelmente a 17% do valor ótimo nos problemas com janelas temporais de amplitude de 60 unidades do tempo. Portanto verifica-se que a qualidade do primeiro limite inferior, obtido pelo pré-processamento do CPLEX, para o correspondente valor ótimo, varia para diferentes amplitudes de janelas temporais, com o aumento da dimensão dos problemas.

Em relação aos tempos de espera, verifica-se que os modelos produzem soluções com diferentes tempos de espera para os mesmos problemas, pelo que revela a existência de soluções múltiplas. Para cada valor de n , observa-se que o aumento da amplitude das janelas temporais provoca um aumento do tempo de espera do veículo na visita aos clientes. No sentido de analisar os tempos de espera obtidos pelos modelos MTZ e MFA para cada valor de n , elaborou-se a figura 4.2 para os problemas de 20 e 60 unidades de tempo de amplitude das janelas temporais.

Através da análise da figura 4.2, verifica-se um comportamento semelhante dos tempos de espera obtidos em ambos os modelos. No caso dos problemas com janelas temporais com amplitude de 20 unidades de tempo, observa-se que o tempo de espera tende a aumentar com o aumento do número de clientes em cada problema. No caso dos problemas com janelas temporais de 60 unidades de tempo de amplitude, verifica-se uma certa tendência de a percentagem do tempo de espera se manter constante com o aumento do número de clientes, em torno de 20% da duração total da rota. Em ambos os casos, a formulação MTZ obteve soluções com tempos de espera ligeiramente inferiores, na comparação com os tempos de espera obtidos pelo MFA.

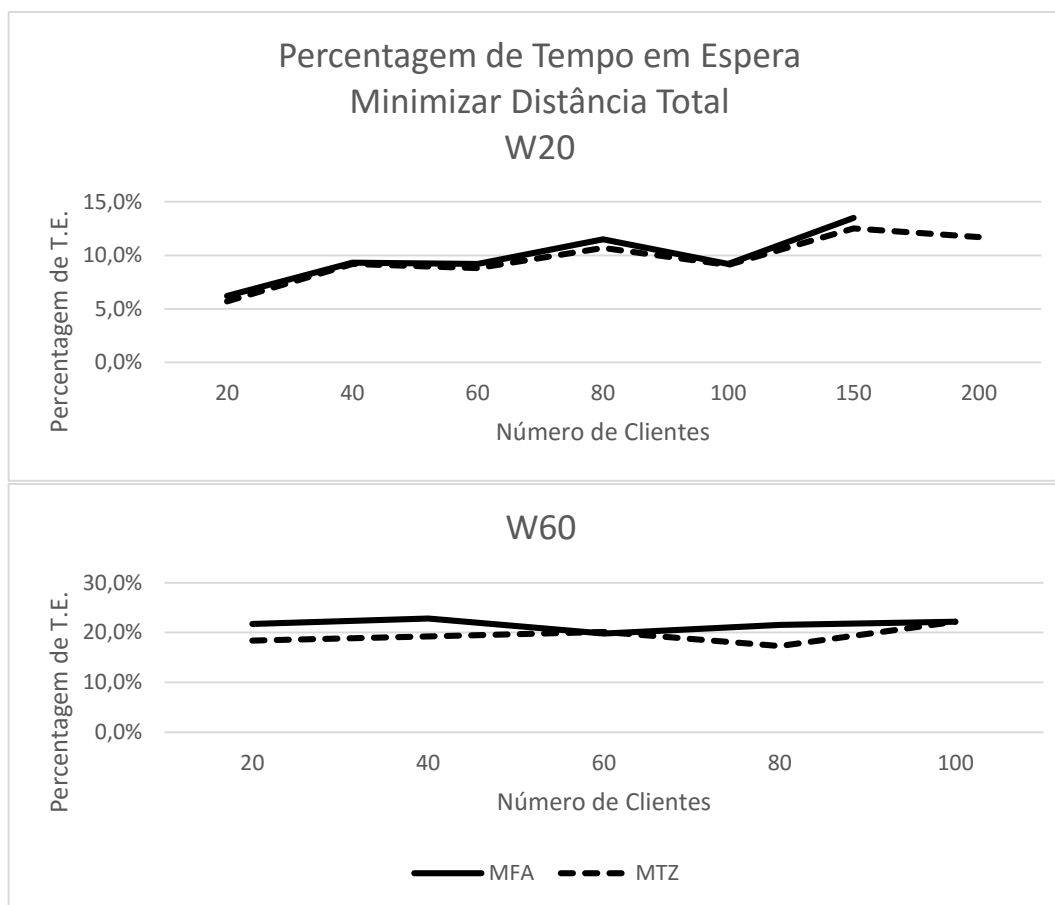


Figura 4. 2: Evolução dos tempos de espera no objetivo de minimizar a distância total

No que diz respeito à resolução da relaxação linear, com e sem desigualdades válidas adicionais, dos modelos MTZ e MFA, na variante que consiste em minimizar distância total percorrida com tempos de espera, os resultados computacionais são apresentados na tabela 4.5. Através da consulta desta tabela, poderá observar-se que o MFA obteve valores de *gap* menores, mas com tempo de processamento mais elevado, quando comparado com a formulação MTZ. Com a introdução das desigualdades válidas em ambos os modelos, os valores de *gap* das relaxações lineares reduzem-se de forma acentuada. Este efeito é mais acentuado no MFA. No entanto, o tempo para a obtenção das soluções de relaxação linear aumenta significativamente. Observe-se, a título de exemplo, que a solução da relaxação linear com desigualdades válidas adicionais para o problema (200,20) demora, em média, quase 1 hora a ser obtida no MFA, quando comparado com os 21 minutos necessários no caso do modelo MTZ para o mesmo problema. Assim, na variante considerada, o MFA obteve soluções de relaxação linear com valor mais próximo do valor ótimo, quando comparado com a formulação MTZ, embora com tempo de processamento mais elevado.

Tabela 4. 5: Comparação dos modelos MTZ e MFA com o objetivo de minimizar distância total percorrida, com tempos de espera, em termos da qualidade dos limites inferiores dados pela relaxação linear, com e sem desigualdades válidas

$ V_c . W $	Miller – Tucker – Zemlin						Modelo de Fluxo Agregado					
	Com D.V.			Sem D.V.			Com D.V.			Sem D.V.		
	LP	Tempo	GAP	LP	Tempo	GAP	LP	Tempo	GAP	LP	Tempo	GAP
20,20	203	1.1	43%	193	0.4	46%	290	0.9	20%	265	0.5	27%
20,60	166	0.8	46%	133	0.3	55%	208	0.9	32%	193	0.4	37%
40,20	251	4.1	48%	230	0.6	52%	383	4.9	21%	341	0.9	29%
40,60	255	83	44%	198	0.5	51%	296	5	27%	257	0.8	36%
60,20	313	13	45%	291	0.8	49%	466	20	20%	414	1.4	28%
60,60	306	12	45%	272	0.8	51%	418	19	26%	376	1.3	34%
80,20	349	30	48%	323	1.1	52%	534	55	20%	476	3.4	29%
80,60	311	30	49%	276	1	54%	456	45	22%	408	3.2	31%
100,20	403	47	46%	377	1.4	50%	591	144	21%	544	5.7	28%
100,60	382	72	42%	348	1.9	47%	564	151	14%	520	4.6	21%
150,20	469	167	46%	433	2.6	49%	737	603	13%	622	17	27%
150,60	433	189		384	1.9		597	658		529	11.9	
200,20	526	1291	48%	494	4.7	51%	788	3344		686	39.5	

É importante observar a capacidade do pré-processamento do *software* CPLEX perante a qualidade do primeiro limite inferior obtido em cada problema. Na variante considerada, o valor do *gap* do primeiro limite inferior, face ao valor ótimo de cada problema, é substancialmente inferior ao correspondente valor de *gap* da relaxação linear para cada problema, em ambos os modelos, com e sem a aplicação de desigualdades válidas adicionais. Observa-se também que o modelo MTZ apresenta, em média, os valores de *gap* da relaxação linear mais elevados, para cada problema, e possui também os valores de *gap* do RRB também mais elevados, quando comparado com o MFA.

Em síntese, na variante do estudo com o objetivo de minimização da distância total percorrida com tempos de espera, em média, é possível concluir o seguinte na comparação dos modelos em estudo:

- O modelo MTZ permite obter as soluções ótimas em menos tempo, sendo possível resolver um maior número de instâncias no tempo limite fixado;
- A resolução da relaxação linear do modelo MFA permite obter limites inferiores para o valor ótimo com valores de *gap* substancialmente menores, embora com tempos computacionais mais elevados. A aplicação das desigualdades válidas adicionais permite uma redução acentuada do correspondente valor do *gap*;
- Os limites inferiores dados pelo pré-processamento do CPLEX apresentam valores de *gap* substancialmente inferiores aos correspondentes valores de *gap* da relaxação linear para cada problema, em ambos os modelos, com e sem a aplicação de desigualdades válidas adicionais;
- A qualidade do valor de *gap* do RRB varia de acordo com a amplitude da janela temporal, com o aumento da dimensão do problema;
- Os tempos de espera apresentam um comportamento diferente para diferentes amplitudes das janelas temporais, com o aumento da dimensão do problema.

4.4.2 Minimizar a Duração da Rota Com Tempos de Espera

Considerando o objetivo de minimizar a duração da rota com possibilidade de espera, os resultados computacionais, presentes na tabela 4.6, levam a que se tirem conclusões diferentes às reveladas no sub-capítulo anterior. Enquanto que para os problemas com janelas temporais com amplitude de 20 unidades de tempo, o modelo MTZ é aquele que permite obter soluções ótimas num menor tempo de processamento, no caso dos problemas com janelas temporais de amplitudes mais alargada (60 unidade de tempo), é com o MFA que se obtém tempos de processamento inferiores. No entanto, o MFA é capaz de resolver um maior número de instâncias do que com o modelo MTZ.

Nesta variante, observa-se uma maior dificuldade na resolução dos problemas com janelas temporais com amplitude mais alargada, quando comparado com a variante anterior anterior, à medida que a dimensão do problema aumenta.

Tabela 4. 6: Comparação dos modelos MTZ e MFA com o objetivo de minimizar a duração da rota, com tempos de espera

$ V_c \cdot W $	Miller – Tucker – Zemlin				Modelo de Fluxo Agregado			
	<i>Tempo</i>	<i>GAP^{RRB}</i>	<i>T.E.</i>	<i>#S.O.</i>	<i>Tempo</i>	<i>GAP^{RRB}</i>	<i>T.E.</i>	<i>#S.O.</i>
20,20	0.03	0%	1.6%	5/5	0.06	0%	1.1%	5/5
20,60	0.16	1.3%	3.6%	5/5	0.29	4.7%	8%	5/5
40,20	0.18	0%	3.5%	5/5	0.67	0%	3%	5/5
40,60	175.7	3.2%	2.7%	5/5	73.98	7.6%	4.4%	5/5
60,20	0.56	0.1%	3.7%	5/5	14.27	0%	3.8%	5/5
60,60	3125	0%	6%	1/5	1389	0%	6.7%	3/5
80,20	3.38	0.1%	4.4%	5/5	50.34	0%	4.7%	5/5
80,60	> 7200			0/5	3932	3.1%	2.5%	3/5
100,20	15.99	0%	3.3%	5/5	290.5	0%	3.5%	5/5
100,60	> 7200			0/5	> 7200			0/5
150,20	369.3	0%	2.5%	2/5	2942	0%	3.7%	3/5
150,60	> 7200			0/5	> 7200			0/5
200,20	> 7200			0/5	> 7200			0/5

Em relação aos valores de *gap* do RRB, confirmam-se as observações feitas sobre os limites inferiores na sub-seção 4.3. Nesta variante, nos problemas com janelas temporais de amplitude reduzida, 20 unidades de tempo, os primeiros limites inferiores obtidos pelo pré-processamento CPLEX são muito aproximados dos correspondentes valores ótimos, em ambas as formulações, com valores de *gap*, em muitos casos, iguais a 0%. No caso do MFA, o valor obtido pelo pré-processamento é igual ao correspondente valor ótimo, ou seja, o *software* encontra rapidamente o valor ótimo mas não a solução ótima. Por outro lado, nos problemas com janelas temporais de amplitude mais alargada, estes valores de *gap* são ligeiramente superiores, quando comparado com a observação anterior, mais ainda assim bastante razoáveis.

No entanto, apesar da capacidade do pré-processamento do CPLEX observada, nesta variante verifica-se uma maior dificuldade em resolver os problemas de maior dimensão, no tempo máximo de processamento considerado.

Observa-se a existência de soluções múltiplas, pela observação das diferentes percentagens do tempo de espera nos diferentes modelos, à semelhança da variante anterior. Observando a figura 4.3, representativa da evolução dos tempos de espera obtidos pelos modelos MTZ e MFA, com o aumento do número de clientes, para as diferentes amplitudes das janelas temporais, não se verificam diferenças significativas nos tempos de espera, em ambos os modelos. Observe-se que na presente variante, com o objetivo de minimizar a duração da rota, os tempos de espera têm um peso decisivo no valor da solução, pelo que os tempos de espera são bastante inferiores na atual variante, quando comparado com a variante anterior de minimização da distância total. Esta diferença é bastante evidente no caso dos problemas com janelas temporais com amplitude de 60 unidades de tempo.

Relativamente à resolução da relaxação linear, de ambos os modelos, na presente variante em estudo, a adição das desigualdades válidas não produz qualquer efeito na solução da relaxação linear do modelo MTZ, de acordo com a respetiva função objetivo (3.12). Neste caso, a adição das desigualdades apenas provocam o aumento do tempo para obter a solução, pelo que não são consideradas nesta formulação.

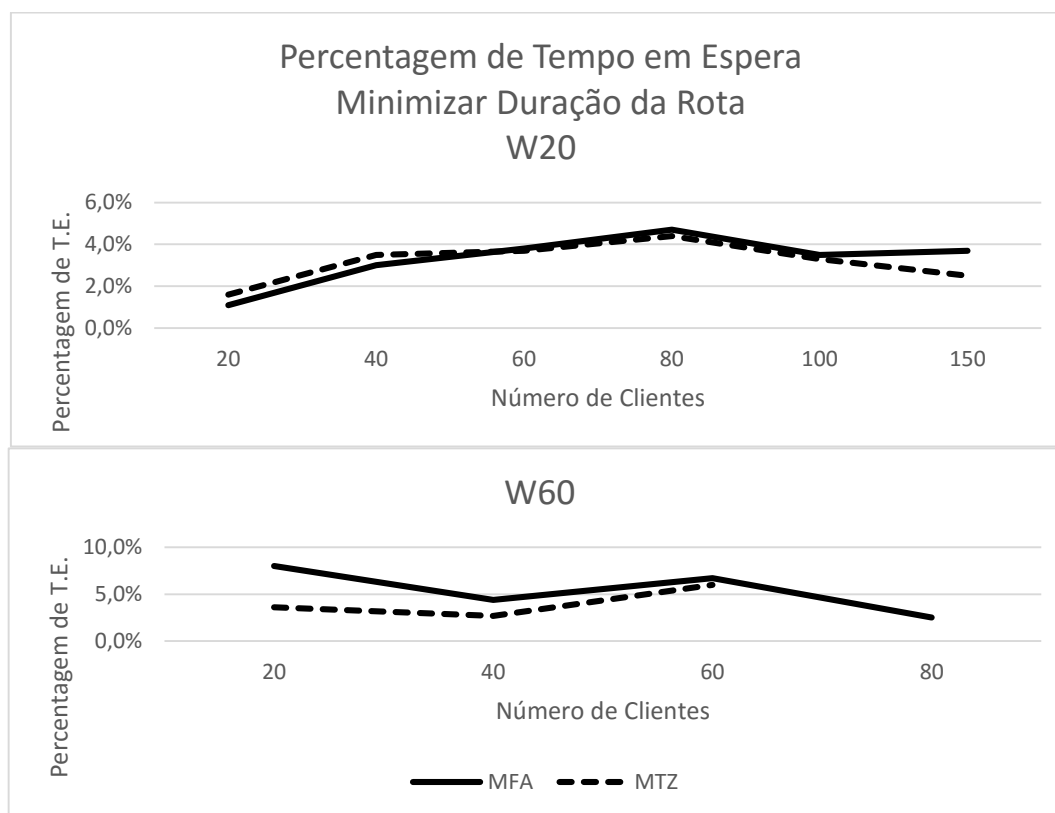


Figura 4. 3: Evolução dos tempos de espera no objetivo de minimizar a duração da rota

Na tabela 4.7, são apresentados os valores das soluções da relaxação linear dos modelos MTZ sem desigualdades e MFA com e sem desigualdades válidas, na variante considerada. Observando os valores apresentados na tabela 4.7, as soluções de relaxação linear relativas ao modelo MTZ correspondem claramente aos valores de *gap* mais reduzidos, em comparação com os correspondentes valores de *gap* do MFA, com e sem desigualdades válidas adicionais. Os tempos computacionais destas soluções também são bastante mais reduzidos no modelo MTZ.

Este desempenho é justificado pela adoção das restrições (3.11) e pela função objetivo (3.10), apresentadas na sub-secção 3.2.1.2. Estas restrições, combinadas com as janelas temporais, tornam o modelo mais forte em termos de relaxação linear. Em relação ao efeito das desigualdades na relaxação linear do MFA, verifica-se que produz uma menor redução do valor de *gap*, quando comparado com os valores homólogos da variante anterior, presentes na tabela 4.5. Em ambos os modelos, o valor do *gap* da relaxação linear aumenta com o aumento da amplitude das janelas temporais.

Tabela 4. 7: Comparação dos modelos MTZ e MFA com o objetivo de minimizar a duração total da rota, com tempos de espera, em termos da relaxação linear com e sem desigualdades

$ V_c \cdot W $	Miller – Tucker – Zemlin			Modelo de Fluxo Agregado					
	Sem D.V.			Com D.V.			Sem D.V.		
	LP	Tempo	GAP	LP	Tem	GAP	LP	Temp	GAP
20,20	339	0.16	8%	343	1	7.7%	338	0.4	9.1%
20,60	310	0.22	14.3%	260	1.1	28.2%	250	0.3	30.9%
40,20	480	0.48	7.8%	458	5.5	12.2%	442	0.9	15.2%
40,60	441	0.32	8.4%	337	5.8	29.8%	306	0.9	36.4%
60,20	598	0.72	4.5%	552	20.7	12%	529	1.7	15.7%
60,60	680	0.5	5.8%	507	26.6	27.7%	483	1.6	31.2%
80,20	717.6	0.9	4.1%	678	85.1	9.5%	651	4.3	13%
80,60	657	0.8		537	80.6	26.5%	503	4	31.3%
100,20	787	1.09	4.4%	731	203	10.7%	723	8.4	11.1%
100,60	773	3.03		602	236		568	7.3	
150,20	947	1.92	2.5%	891	1783	7.3%	874	27.7	9.1%
150,60	934	2.4		671	1633		623	19.3	
200,20	1105	4.74		> 7200			991	25.5	

Em resumo, na variante do estudo, com o objetivo de minimizar a duração da rota com tempos de espera, em média, é possível concluir o seguinte na comparação dos modelos MTZ e MFA:

- Com o MFA é possível resolver um maior número de instâncias com diferentes amplitudes de janelas temporais, no tempo máximo de processamento considerado;
- A relaxação linear do modelo MTZ permite obter limites inferiores para o valor ótimo com valores de *gap* e tempos computacionais substancialmente reduzidos;
- Os primeiros limites inferiores obtidos pelo pré-processamento do CPLEX apresentam valores de *gap*, em muitos casos, iguais a 0%, em ambas as formulações. No caso dos problemas com janelas temporais de amplitude mais alargada, este valor de *gap* aumenta ligeiramente, mas, ainda assim, inferior aos correspondentes valores de *gap* da relaxação linear, em ambos os modelos, com e sem a aplicação de desigualdades válidas adicionais;
- Não se verificam diferenças significativas nos tempos de espera de ambos os modelos, para as diferentes amplitudes das janelas temporais, com o aumento da dimensão do problema.

4.4.3 Minimizar a Duração da Rota Sem Tempos de Espera

Considerando a variante de minimizar a duração da rota, sem possibilidade de espera, os resultados computacionais na obtenção das soluções ótimas estão presentes na tabela 4.8. Por observação desta tabela, verifica-se que o MFA obteve os resultados mais promissores, resolvendo um maior número de instâncias. Recorde-se que na variante do problema sem possibilidade de tempos de espera, nem todas as instâncias de referência são admissíveis. Esta situação ocorre em alguns dos problemas com janelas temporais de amplitude reduzida, com 20 unidades de tempo.

À semelhança da variante anterior, os valores de *gap* do RRB são relativamente reduzidos, sendo praticamente 0% nos problemas com janelas temporais de amplitude reduzida. A formulação MTZ é a que apresenta estes valores *gap* mais reduzidos, apesar de necessitar de um maior tempo computacional para resolver otimamente os problemas de maior dimensão. Confirma-se também, o aumento deste valor de *gap* com o aumento da amplitude das janelas temporais.

Tabela 4. 8: Comparação dos modelos MTZ e MFA com o objetivo de minimizar a duração da rota, sem tempos de espera

$ V_c \cdot W $	Miller – Tucker – Zemlin				Modelo de Fluxo Agregado			
	<i>Tempo</i>	<i>GAP^{RRB}</i>	<i>#Imp.</i>	<i>#S.O.</i>	<i>Tempo</i>	<i>GAP^{RRB}</i>	<i>#Imp.</i>	<i>#S.O.</i>
20,20	0.03	0.7%	4/5	5/5	0.06	0.7%	4/5	5/5
20,60	0.23	1.2%	0/5	5/5	0.87	4.8%	0/5	5/5
40,20	0.43	0.2%	2/5	5/5	2.3	0.2%	2/5	5/5
40,60	626.7	3.1%	0/5	5/5	416.7	7.6%	0/5	5/5
60,20	1.01	0%	2/5	5/5	62.92	0%	2/5	5/5
60,60	176.8	0%	0/5	1/5	1177.4	0.1%	0/5	4/5
80,20	5.23		5/5	5/5	103.8		5/5	5/5
80,60	> 7200		0/5	0/5	> 7200		0/5	0/5
100,20	827.4	0%	1/5	4/5	853.1	0%	1/5	5/5
100,60	> 7200		0/5	0/5	> 7200		0/5	0/5
150,20	> 7200		2/5	2/5	5023.2	0%	2/5	3/5
150,60	> 7200		0/5	0/5	> 7200		0/5	0/5
200,20	> 7200		0/5	0/5	> 7200		0/5	0/5

Relativamente à resolução da relaxação linear, de ambos os modelos, à semelhança da variante anterior, a adição das desigualdades válidas não produz qualquer efeito na solução da relaxação linear da formulação MTZ, pelo que não são consideradas nesta formulação. Assim, os valores obtidos na relaxação linear dos modelos MTZ, sem desigualdades válidas, e MFA com e sem desigualdades válidas, estão presentes na tabela 4.9.

Na presente variante, as conclusões são semelhantes à variante anterior. Os valores de *gap* e tempos de execução observados na obtenção das soluções da relaxação linear do modelo MTZ são relativamente reduzidos e substancialmente inferiores aos correspondentes valores obtidos pelo MFA, com e sem a adição de desigualdades válidas, nos diversos problemas. O aumento da amplitude das janelas temporais, à semelhança dos casos anteriores, provoca um aumento do valor de *gap* da relaxação linear, para cada valor de *n*. Este aumento é mais evidente no caso do MFA.

Tabela 4. 9: Comparação dos modelos MTZ e MFA com o objetivo de minimizar a duração total da rota, sem tempos de espera, em termos da relaxação linear com e sem desigualdades válidas

$ V_c \cdot W $	Miller – Tucker – Zemlin			Modelo de Fluxo Agregado					
	Sem D.V.			Com D.V.			Sem D.V.		
	LP	Tempo	GAP	LP	Tem	GAP	LP	Temp	GAP
20,20	353	0.2	13.1%	371	1.3	8.7%	365	0.6	10.1%
20,60	310	0.18	14.4%	260	0.8	28.3%	250	0.4	30.9%
40,20	508	0.27	7.2%	493	6.5	10.1%	482	1	12.1%
40,60	441	0.44	8.4%	337	5.2	29.8%	317	1	36%
60,20	603	0.6	3.8%	554	26.7	11.7%	525	1.7	16.2%
60,60	680	0.5	5.8%	492	21.1	28.1%	457	1.6	33.2%
80,20	718	1.14		678	83.2		651	4.1	
80,60	657	0.8		511	64.8		475	4	
100,20	790	1.31	4.4%	726	274	11.5%	723	7.6	12.6%
100,60	773	1.12		602	187		568	7.1	
150,20	961	2.34	0.6%	885	2161	8.5%	884	24.2	8.6%
150,60	934	2.96		671	1369		623	18.3	
200,20	1105	7.02		984	7198		973	61.1	

Nesta variante também se confirma a boa capacidade do pré-processamento do *software* CPLEX na obtenção do primeiro limite inferior em cada modelo. À semelhança das variantes anteriores, os valores do *gap* do RRB, são substancialmente inferiores aos correspondentes valores de *gap* da relaxação linear, para cada problema, em ambos os modelos.

Assim, na variante em estudo, com o objetivo de minimizar a duração da rota sem tempos de espera, em média, é possível concluir o seguinte na comparação dos modelos MTZ e MFA:

- O MFA permite resolver um maior número de instâncias com diferentes amplitudes para as janelas temporais, no tempo máximo considerado;
- A relaxação linear do modelo MTZ permite obter limites inferiores para o valor ótimo com valores de *gap* e tempos computacionais substancialmente reduzidos;

- Para todas as instâncias, o primeiro limite inferior fornecido pelo pré-processamento do CPLEX, apresenta um valor de *gap* muito próximo de 0%, em ambas as formulações. No caso dos problemas com janelas temporais de amplitude mais alargada, o valor de *gap* de RRB aumenta ligeiramente, mas, ainda assim, inferior ao correspondente valor de *gap* da relaxação linear, em ambos os modelos, com e sem a aplicação de desigualdades válidas adicionais;

4.4.4 Minimizar a Distância Total Percorrida Com Limite Máximo de Tempo de Visita a Cada Cliente

Além das variantes consideradas, pretende-se avaliar os modelos MTZ e MFA nos problemas em que se considera apenas o limite superior das janelas temporais, sendo sempre 0 o valor do limite inferior das janelas temporais. Ou seja, apenas com a restrição adicional do instante máximo de visita de cada cliente i , $\forall i \in V_c$, (b_i) . Observou-se que, no TSPTW, as janelas temporais possibilitam a obtenção de bons limites inferiores para o valor ótimo, pelo que pretende-se analisar o “comportamento” dos modelos MTZ e MFA perante a ausência do limite inferior da janela temporal, relativamente às instâncias de referência consideradas nesta dissertação.

Para analisar esta questão foram realizados testes computacionais baseados na resolução das mesmas instâncias, mas ignorando o limite inferior da janela temporal a_i , $\forall i \in V_c$, e mantendo o limite superior da janela temporal b_i , $\forall i \in V_c$.

Assim, na tabela 4.10 apresentam-se os resultados obtidos pelos dois modelos, MTZ e MFA, considerando um tempo máximo de processamento de 2 horas. Na tabela 4.11 apresentam-se os resultados obtidos na resolução da relaxação linear para cada um dos modelos em estudo. Nestes testes computacionais, não são consideradas as variantes com e sem possibilidade de espera, dado que produzem as mesmas soluções e, como função objetivo, pretende-se minimizar a distância total percorrida.

Pela análise da tabela 4.10, verifica-se que no modelo MTZ não foi possível obter soluções ótimas de problemas com dimensão igual ou superior a 40 clientes, no tempo de processamento máximo de 2 horas. Por sua vez, com o MFA foi possível obter as soluções ótimas de todos os problemas excepto um, nomeadamente com 60 clientes e uma amplitude de 20 unidades de tempo. Note-se ainda que para as instâncias resolvidas por ambos os modelos, o tempo computacional dispendido pelo modelo MFA é inferior ao requerido pelo modelo MTZ.

Tabela 4. 10: Comparação dos modelos MTZ e MFA com o objetivo de minimizar distância total percorrida, considerando apenas o limite superior $b_j, \forall j \in V$

$ V_c \cdot W $	Miller – Tucker – Zemlin				Modelo de Fluxo Agregado			
	\hat{V}	<i>Tempo</i>	<i>GAP</i> ^{RRB}	#S.O.	\hat{V}	<i>Tempo</i>	<i>GAP</i> ^{RRB}	#S.O.
20, 20	241	589.5	23.1%	5/5	241	586	31.2%	5/5
20, 60	190	488.7	18.3%	5/5	190	110.5	29.3%	5/5
40, 20	> 7200			0/5	270	351.1	31.6%	2/5
40, 60	> 7200			0/5	237	99.1	23.5%	2/5
60, 20	> 7200			0/5	> 7200			0/5
60, 60	> 7200			0/5	330	515.9	24%	1/5

Em relação aos valores de *gap* associados ao RRB, a formulação MTZ apresenta, em média, menores valores de *gap*.

Relativamente à tabela 4.11, referente à resolução da relaxação linear dos modelos MTZ e MFA, na variante considerada, verifica-se que o MFA obtém as soluções com valores de *gap* mais reduzidos, embora com tempos de processamento ligeiramente superiores, na comparação com a formulação MTZ. Em ambos os modelos são aplicadas as desigualdades válidas, na resolução da relaxação linear.

Tabela 4. 11: Comparação dos modelos MTZ e MFA em termos da resolução da relaxação linear com desigualdades válidas, com o objetivo de minimizar distância total percorrida com apenas o limite superior da janela temporal $b_j, \forall j \in V$

$ V_c \cdot W $	Miller – Tucker – Zemlin			Modelo de Fluxo Agregado		
	<i>LP</i>	<i>Tempo</i>	<i>GAP</i>	<i>LP</i>	<i>Tempo</i>	<i>GAP</i>
20, 20	187.8	0.56	21.5%	190.4	0.92	20.5%
20, 60	164.2	0.52	12.4%	168	0.76	10.5%
40, 20	235.2	2.86		237.9	4.8	11.7%
40, 60	223.3	2.83		215	4.45	9.1%
60, 20	287.6	8.68		289.7	16.5	
60, 60	301	8.83		312.5	15.2	5.3%

Considerando a qualidade dos primeiros limites inferiores fornecidos pelo pré-processamento do *software* CPLEX, estes valores não são mais do que o cálculo da relaxação linear de cada problema, pelo que os valores de *gap* do RRB são superiores aos valores de *gap* das respectivas soluções de relaxação linear com desigualdades válidas adicionais, em ambos os modelos. Esta diferença é mais evidente no caso do MFA. Assim, nos problemas com janelas temporais em que o limite inferior a_i , $\forall i \in V_c$, é sempre 0, o primeiro limite inferior para o valor ótimo, obtido pelo pré-processamento do CPLEX, baseia-se no cálculo da relaxação linear. Os valores da relaxação linear, sem desigualdades válidas adicionais, poderão ser observados em anexo.

Portanto, nesta variante em estudo, com o objetivo de minimização da distância total percorrida com limite máximo de visita a cada cliente, em média, é possível concluir o seguinte, na comparação dos modelos MTZ e MFA:

- Com o MFA é possível resolver um maior número de instâncias com diferentes instantes máximos de vista aos clientes, no período máximo de tempo considerado;
- Em termos da qualidade das respectivas relaxações lineares, o modelo MFA permite obter valores de *gap* mais reduzidos;
- O valor do primeiro limite inferior fornecido pelo pré-processamento do CPLEX, não difere do correspondente valor da relaxação linear, sem a aplicação das desigualdades válidas adicionais.

4.4.5 Número de Variáveis e Restrições

Para cada grupo de instâncias caracterizadas pelo valor de n , apresenta-se na tabela 4.12 o número de variáveis e restrições dos modelos MTZ e MFA, nas variantes consideradas.

A formulação MTZ apresenta, naturalmente, um número de variáveis e restrições diferente nas variantes que consistem na minimização da distância total percorrida e minimização da duração da rota com e sem tempos de espera. O MFA apresenta um número de variáveis e restrições igual nas diferentes variantes em estudo. Observando a tabela 4.12, verifica-se que o MFA apresenta, aproximadamente, o dobro do número de variáveis e restrições em relação à formulação MTZ, para cada valor de n .

Tabela 4. 12: Comparação dos modelos MTZ e MFA em termos do número de variáveis e restrições

$ V_c $	Miller – Tucker – Zemlin				Modelo de Fluxo Agregado	
	<i>Min. Distância</i>		<i>Min. Duração</i>		<i>Min. Dist./Duração</i>	
	<i>#Var.</i>	<i>#Rest.</i>	<i>#Var.</i>	<i>#Rest.</i>	<i>#Var.</i>	<i>#Rest.</i>
20	463	525	464	546	882	966
40	1723	1845	1724	1886	3362	3526
60	3783	3965	3784	4026	7442	7686
80	6643	6885	6644	6966	13122	13446
100	10303	10605	10304	10706	20402	20806
150	22953	23405	22954	23556	45602	46206
200	40603	41205	40604	41406	80802	81606

4.5 Variação das Janelas Temporais

Na presente dissertação foi observado que as janelas temporais podem influenciar diretamente as soluções do TSPTW nas diferentes variantes consideradas. Mas em que medida esta influência ocorre? O que acontece concretamente, do ponto de vista prático, com o aumento da amplitude das janelas temporais? Nas janelas temporais dos respectivos clientes, fazer variar o limite inferior ou o limite superior irá produzir os mesmos efeitos? No sentido de analisar estas questões, foi feita uma experiência computacional com recurso às instâncias de referência até a um máximo de 40 clientes.

Considerando o intervalo de tempo em que cada cliente i , $\forall i \in V_c$, deve ser visitado $[a_i, b_i]$, os testes realizados baseiam-se em fazer variar o limite inferior a_i , fixando o limite superior b_i , e vice-versa. As percentagens de variação aplicadas a cada um destes instantes variam entre -25% e +25%.

Para cada uma das três variantes consideradas – minimizar a distância total com tempos de espera, minimizar a duração da rota com e sem tempos de espera – são apresentadas duas tabelas e dois gráficos correspondentes, relativas aos dois casos considerados de variação da amplitude das janelas temporais. Em cada tabela, a primeira coluna caracteriza o problema de cada par $(|V_c|, |W|)$ e as colunas seguintes

contêm os resultados computacionais obtidos para cada variação das janelas temporais. Os resultados computacionais são apresentados na forma sintetizada e são caracterizados por \hat{V} , $Temp.$ e $T.E.$ que representam, respetivamente, o valor da solução ótima obtida, o tempo requerido para a obter e a percentagem de tempo em espera.

Os resultados computacionais foram obtidos com recurso aos modelos, MTZ ou MFA, que para a variante e instância em causa foi mais eficiente, isto é, o modelo que obteve a solução num tempo menor. Assim, os resultados correspondentes à variante com vista à minimização a distância total foram obtidos com o modelo MTZ e, nas variantes que consistem em minimizar a duração da rota, com e sem tempos de espera, foi considerado o MFA. Desta forma, foi possível resolver, dentro do tempo limite, todas as instâncias de teste. Todos os resultados computacionais estão disponíveis em anexo.

Pela observação das tabelas 4.13 e 4.14, referentes à variação do limite inferior da janela temporal a_j , com b_j fixo, $\forall j \in V$, e do limite superior da janela temporal b_j , com a_j fixo, $\forall j \in V$, respetivamente, com o objetivo de minimizar a distância total percorrida, com tempos de espera, verifica-se que o aumento gradual da amplitude da janela temporal permite a diminuição da distância total percorrida. Os tempos computacionais, bem como os tempos de espera, aumentam com o aumento da amplitude. Em ambos os casos, não se verificam diferenças significativas nos valores das soluções.

No caso da diminuição da amplitude da janela temporal, em todas as instâncias testadas, reduções superiores a 5% tornam o problema impossível. Da mesma forma, para os problemas com janelas temporais com 20 unidades de tempo, qualquer redução da amplitude torna o problema impossível. Nos restantes problemas, verifica-se que a redução da amplitude da janela temporal, em média, provoca o aumento da distância percorrida.

Tabela 4. 13: Variação do limite inferior da janela temporal a_j , com b_j fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a distância total percorrida, com tempos de espera

$ V_c \cdot W $	-25%			-10%			-5%			+5%		
	\hat{V}	$Temp.$	$T.E.$	\hat{V}	$Temp.$	$T.E.$	\hat{V}	$Temp.$	$T.E.$	\hat{V}	$Temp.$	$T.E.$
20, 20	333	0.1	11	362	0.04	25	362	0.06	23	Imp.	0.02	
20, 60	247	0.3	106	275	0.1	52	281	0.2	69	303	0.14	77
40, 20	384	58.4	80	463	0.9	58	473	0.3	49	Imp.	0.01	
40, 60	341	577	143	390	131	90	418	81	98	461	1.5	90

Tabela 4. 14: : Variação do limite superior da janela temporal b_j , com a_j fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a distância total percorrida, com tempos de espera

$ V_c \cdot W $	-5%			+5%			+10%			+25%		
	\hat{V}	Temp.	T.E.	\hat{V}	Temp.	T.E.	\hat{V}	Temp.	T.E.	\hat{V}	Temp.	T.E.
20, 20	Imp.	0.01		362	0.03	40	346	0.04	65	337	0.08	93
20, 60	304	0.17	62	281	0.18	84	275	0.17	85	253	0.2	134
40, 20	Imp.	0.01		472	0.32	81	462	0.56	90	401	18	157
40, 60	406	0.61	79	416	6.47	110	390	57	148	343	27.8	177

No sentido de se compreender melhor os efeitos da variação do limite inferior da janela temporal a_j , com b_j fixo, $\forall j \in V$, e do limite superior da janela temporal b_j , com a_j fixo, $\forall j \in V$, foram produzidos dois gráficos apresentados, respetivamente, nas figuras 4.4 e 4.5, considerando o problema (20,60).

Pela observação das figuras 4.4 e 4.5, verifica-se que o aumento da amplitude da janela temporal, quer provocado pela diminuição do limite inferior a , quer provocado pelo aumento do limite superior b , leva a uma redução da distância total da rota relativamente semelhante em ambos os casos. A maior diferença está nos tempos de espera, provocando, em média, uma rota mais longa no caso do aumento do limite superior da janela temporal b , embora o objetivo consista unicamente em minimizar a distância total percorrida.

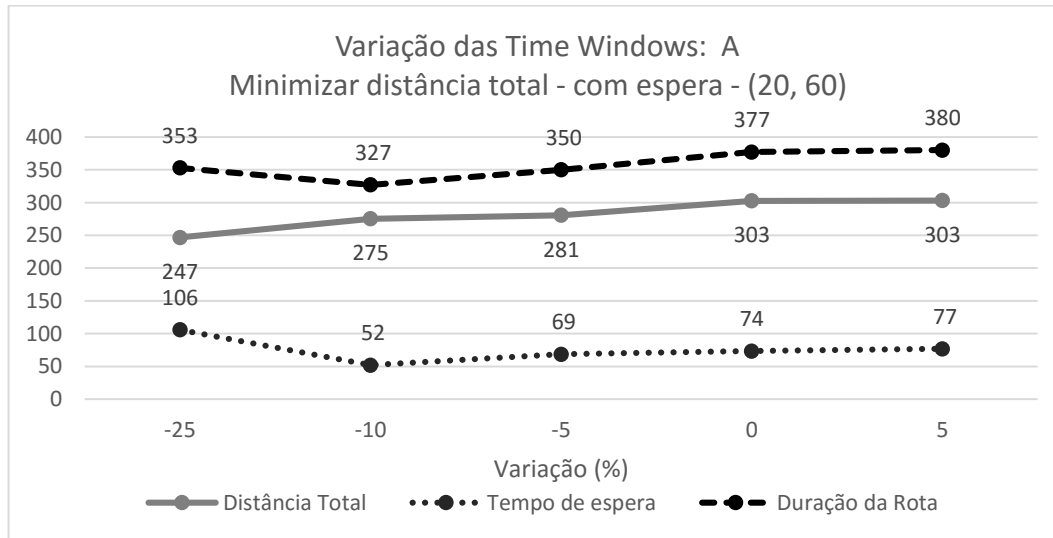


Figura 4. 4: Variação do limite inferior da janela temporal a_j , com b_j fixo, $\forall j \in V$, do problema (20,60), no objetivo de minimizar a distância total percorrida, com tempos de espera

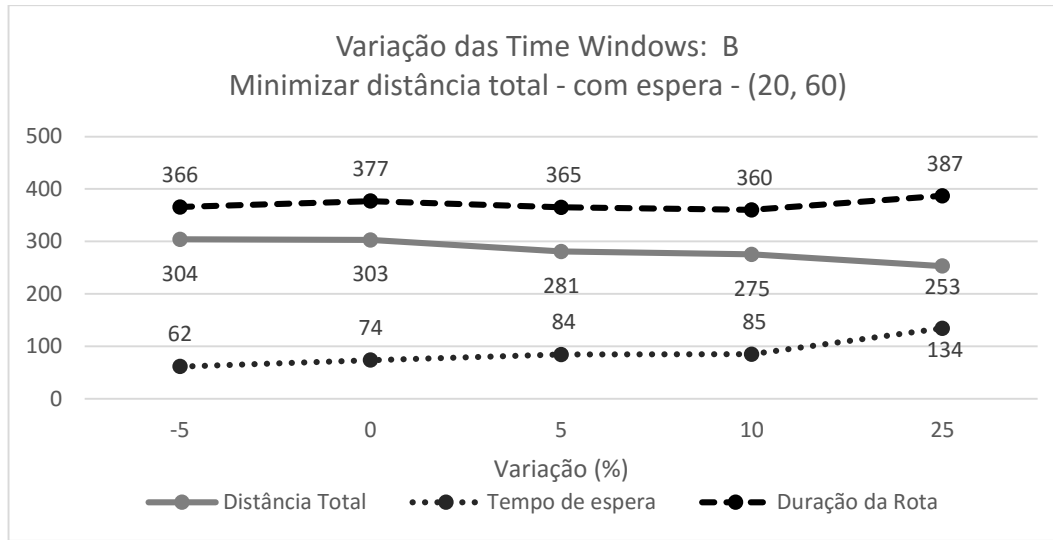


Figura 4. 5: Variação do limite superior da janela temporal b_j , com a_j fixo, $\forall j \in V$, do problema (20,60), no objetivo de minimizar a distância total percorrida, com tempos de espera

Em todo o caso, em ambas as situações, verifica-se que o aumento gradual da amplitude permite uma redução da distância percorrida pelo veículo mas obriga ao aumento dos tempos de espera, verificando-se a existência de um *trade-off* entre a duração da rota e a distância percorrida, na variante considerada.

Por sua vez, na variante que consiste em minimizar a duração da rota, com tempos de espera, os resultados computacionais relativos ao aumento gradual da amplitude das janelas temporais, através da variação de a_j , com b_j fixo, $\forall j \in V$, e da variação de b_j , com a_j fixo, $\forall j \in V$, estão presentes, respetivamente, nas tabelas 4.15 e 4.16. Na tabela 4.15 verifica-se que o aumento da amplitude da janela temporal,

Tabela 4. 15: Variação do limite inferior da janela temporal a_j , com b_j fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a duração da rota, com tempos de espera

$ V_c \cdot W $	-25%			-10%			-5%			+5%		
	\hat{V}	Temp.	T.E.	\hat{V}	Temp.	T.E.	\hat{V}	Temp.	T.E.	\hat{V}	Temp.	T.E.
20, 20	334	0.86	1	363	0.18	1	364	0.07	2	Imp.	0.02	
20, 60	292	5.1	6	327	1.04	14	339	0.46	33	369	0.24	47
40, 20	426	499	4	491	24.6	10	504	13.8	11	Imp.	0.01	
40, 60	392	1614	6	443	1115	7	478	166	14	525	52.1	18

Tabela 4. 16: Variação do limite superior da janela temporal b_j , com a_j fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a duração da rota, com tempos de espera

$ V_c \cdot W $	-5%			+5%			+10%			+25%		
	\hat{V}	Temp.	T.E.	\hat{V}	Temp.	T.E.	\hat{V}	Temp.	T.E.	\hat{V}	Temp.	T.E.
20,20	Imp.	0.01		372	0.16	6	362	0.15	6	370	0.72	13
20,60	356	0.35	33	354	0.57	36	354	0.38	33	354	1.43	57
40,20	Imp.	0.01		521	3.58	21	521	2.81	15	520	50.8	64
40,60	Imp.	0.01		496	150	17	494	113	11	490	816	18

por via da variação de a , permite a redução da duração da rota e dos tempos de espera. No entanto, por observação da tabela 4.16, o aumento da amplitude da janela temporal, por via da variação de b , não permite uma redução significativa da duração da rota ou não se observa redução. No caso dos tempos de espera, aumentam com este aumento de amplitude. Em ambos os casos, e à semelhança de casos anteriores, os tempos de execução aumentam com o aumento da amplitude da janela temporal.

As figuras 4.6 e 4.7, referentes ao problema (20,60), são um exemplo ilustrativo das observações feitas anteriormente. Na variação de a_j , com b_j fixo, $\forall j \in V$, presente na figura 4.6, a duração da rota diminui com o aumento da amplitude da janela temporal, na medida em que ocorre redução dos tempos de espera e da

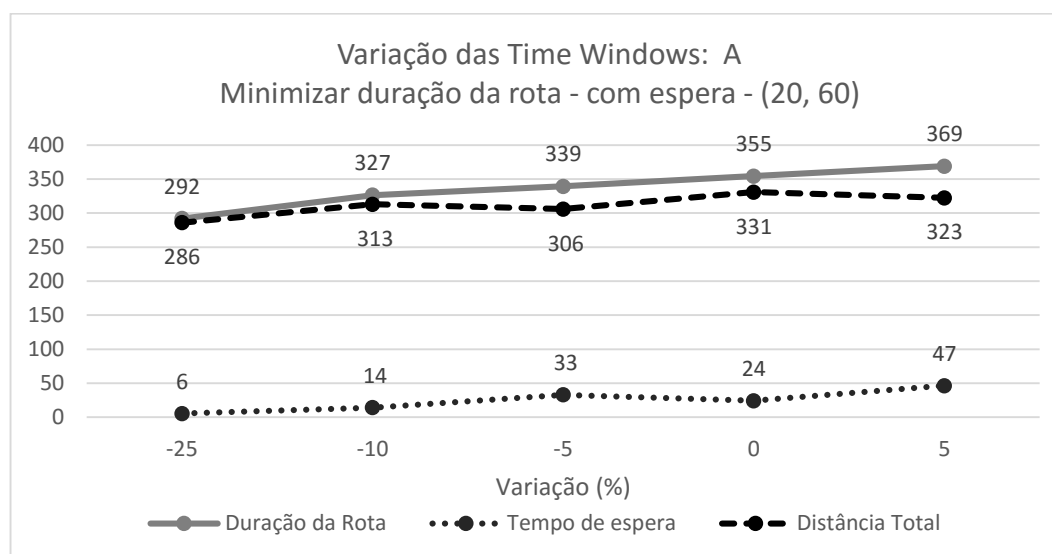


Figura 4. 6: Variação do limite inferior da janela temporal a_j , com b_j fixo, $\forall j \in V$, do problema (20,60), no objetivo de minimizar a duração da rota, com tempos de espera

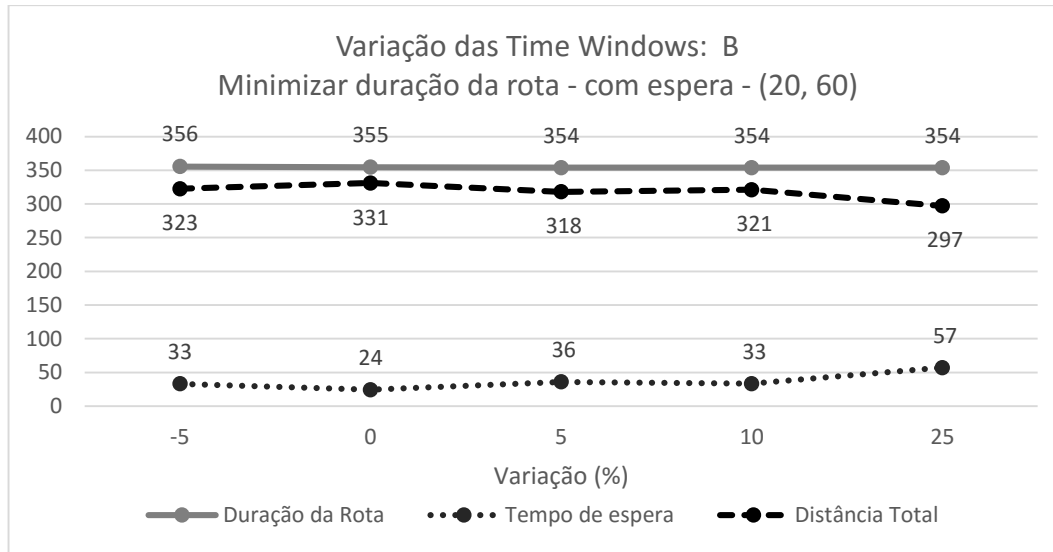


Figura 4. 7: Variação do limite superior da janela temporal b_j , com a_j fixo, $\forall j \in V$, do problema (20,60), no objetivo de minimizar a duração da rota, com tempos de espera

distância percorrida. Na redução da amplitude da janela temporal, verifica-se o aumento da duração da rota, devido ao aumento acentuado dos tempos de espera.

No caso do aumento da amplitude da janela temporal provocado pela variação de b_j , com a_j fixo, $\forall j \in V$, presente na figura 4.7, a duração da rota mantém-se praticamente inalterada. Observa-se que o aumento da amplitude da janela temporal permite a redução da distância percorrida mas, em contrapartida, os tempos de espera aumentam, ou seja, o veículo chega ao mesmo tempo, apesar de percorrer uma distância mais curta, porque tem que esperar.

Por fim, relativamente à variante com o objetivo de minimizar a duração da rota, sem tempos de espera, a experiência computacional relativa ao aumento gradual da amplitude das janelas temporais, através da variação de a_j , com b_j fixo, $\forall j \in V$, e da variação de b_j , com a_j fixo, $\forall j \in V$, é apresentada, respetivamente, nas tabelas 4.17 e 4.18. Por observação da tabela 4.17, pode-se concluir que a duração da rota diminui significativamente com o aumento da amplitude da janela temporal, por via da redução do limite inferior a , em todos os problemas.

Observando a tabela 4.18, verifica-se uma redução da duração da rota com o aumento da amplitude das janelas temporais, por via do aumento do limite superior da janela temporal b , mas com uma intensidade muito inferior, quando comparado com o caso anterior. Em ambas as situações, os tempos para obtenção das soluções ótimas aumentam com o aumento da amplitude da janela temporal.

Tabela 4. 17: Variação do limite inferior da janela temporal a_j , com b_j fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a duração da rota, sem tempos de espera

$ V_c \cdot W $	-25%		-10%		-5%		0%		+5%	
	\hat{V}	<i>Temp.</i>	\hat{V}	<i>Temp.</i>	\hat{V}	<i>Temp.</i>	\hat{V}	<i>Temp.</i>	\hat{V}	<i>Temp.</i>
20, 20	334	0.5	366	0.15	367	0.06	406	0.06	<i>Imp.</i>	0.02
20, 60	292	4.73	327	1.28	340	1.44	355	0.52	<i>Imp.</i>	0.01
40, 20	426	146	491	24.4	505	8.03	548	2.3	<i>Imp.</i>	0.01
40, 60	394	1413	453	1611	478	449	496	360	526	96.8

Tabela 4. 18: Variação do limite superior da janela temporal b_j , com a_j fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a duração da rota, sem tempos de espera

$ V_c \cdot W $	-5%		0%		+5%		+10%		+25%	
	\hat{V}	<i>Temp.</i>	\hat{V}	<i>Temp.</i>	\hat{V}	<i>Temp.</i>	\hat{V}	<i>Temp.</i>	\hat{V}	<i>Temp.</i>
20, 20	<i>Imp.</i>	0.01	406	0.06	375	0.07	373	0.18	371	0.46
20, 60	<i>Imp.</i>	0.02	355	0.52	355	2.5	354	1.83	354	2.45
40, 20	<i>Imp.</i>	0.01	548	2.3	521	2.23	521	15.3	520	68.3
40, 60	<i>Imp.</i>	0.01	496	360	496	113	491	65.5	486	1809

Na maior parte dos problemas a redução da amplitude da janela temporal, conduz à obtenção de problemas impossíveis. Nos casos em que o problema tem soluções admissíveis, a redução da amplitude da janela temporal para todos os clientes, por mais pequena que seja, obriga a uma rota com duração mais longa.

Por sua vez, as figuras 4.8 e 4.9, ilustram as observações feitas, na variante considerada. À semelhança da variante anterior, para o problema (20,60), o aumento da amplitude da janela temporal de cada cliente, provocada pela diminuição do limite inferior da janela temporal a , provoca uma redução significativa da duração da rota, quando comparado com a escassa ou inexistente redução da duração da rota obtida pelo aumento da amplitude da janela temporal provocado pelo aumento do limite superior da janela temporal b .

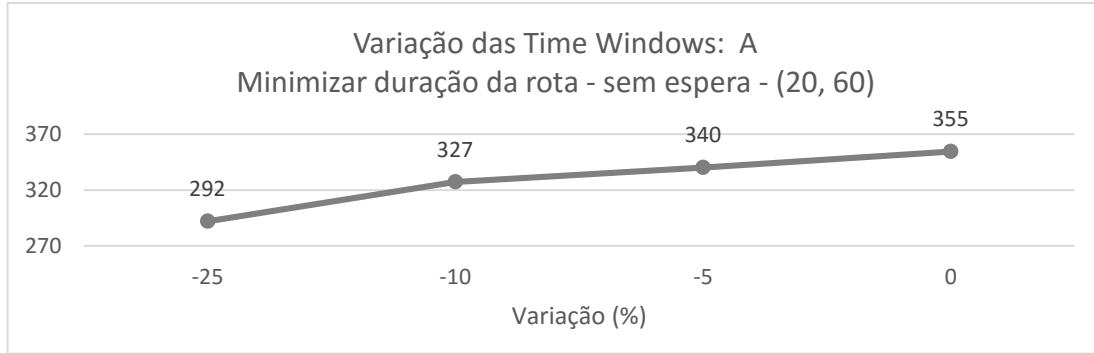


Figura 4. 8: Variação do limite inferior da janela temporal a_j , com b_j fixo, $\forall j \in V$, do problema (20,60), no objetivo de minimizar a duração da rota, sem tempos de espera

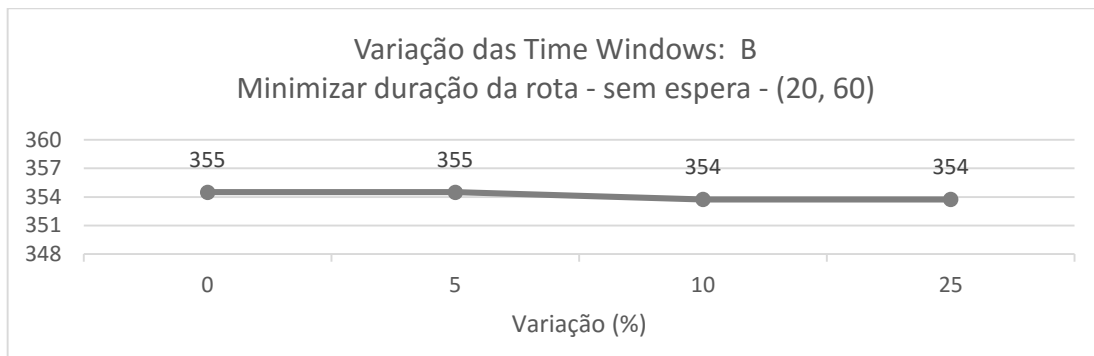


Figura 4. 9: Variação do limite superior da janela temporal b_j , com a_j fixo, $\forall j \in V$, do problema (20,60), no objetivo de minimizar a duração da rota, sem tempos de espera

Em síntese, com este estudo, é possível observar que para as diferentes variantes consideradas, em média, se observam soluções com comportamentos diferentes, nos dois casos abordados na variação das janelas temporais:

- Na variante com o objetivo de minimizar a distância total percorrida, com tempo de espera, verifica-se que o aumento da amplitude da janela temporal, quer provocado pela diminuição do limite inferior da janela temporal a , quer provocado pelo aumento do limite superior da janela temporal b , leva a uma redução da distância total da rota relativamente semelhante em ambos os casos. A maior diferença está nos tempos de espera, provocando, em média, uma rota mais longa no caso do aumento do limite superior b ;
- Na variante que consiste em minimizar a duração da rota, com tempos de espera, verifica-se que o aumento da amplitude da janela temporal provocado pela diminuição do limite inferior da janela temporal a , permite uma redução acentuada da duração da rota, no entanto, esta

mantém-se praticamente inalterada, perante o aumento da amplitude provocado pelo aumento do limite superior da janela temporal b .

- No caso da variante que consiste em minimizar a duração da rota, sem tempos de espera, as conclusões relacionadas com a duração da rota são semelhantes ao observado na variante anterior.

Capítulo 5

Conclusões

Nesta dissertação foi discutido o TSPTW. Este problema consiste em determinar uma rota de custo mínimo, com início e fim no depósito, garantindo que todos os clientes sejam visitados uma única vez, na respetiva janela temporal.

O foco principal foi a elaboração e comparação de modelos em PLIM, com a utilização de variáveis de fluxo para modelar a conexidade da rota, para o TSPTW.

No âmbito desta dissertação, foram obtidas as soluções ótimas das instâncias de referência, utilizadas como instâncias de teste, dado que não eram conhecidas na sua totalidade. Foram resolvidos problemas com dimensões compreendidas entre 20 a 200 clientes, com diferentes amplitudes para as janelas temporais.

Foram consideradas e testadas diversas variantes do problema com vista à minimização da distância total percorrida, com tempos de espera, e a minimização da duração da rota, com e sem tempos de espera. Foi também considerada uma variante adicional com o objetivo de minimizar a distância total percorrida com limite máximo de tempo de visita a cada cliente, no sentido de comparar os modelos considerados nos problemas com janelas temporais em que o valor do primeiro limite inferior é sempre 0.

Foi também realizado um estudo complementar com vista em fazer variar gradualmente a amplitude das janelas temporais, aumentando e reduzindo, respetivamente, o limite superior e inferior de cada janela, com o objetivo de compreender a influência desta variação na correspondente solução ótima dos diversos problemas, nas diferentes variantes.

Com base nos testes realizados, verificou-se que não existe uma formulação dominante para todas as variantes. Assim, em síntese, o modelo MTZ revelou ser mais adequado para:

- O cálculo da solução ótima da variante do problema com vista à minimização da distância total percorrida, com tempos de espera;
- A resolução da relaxação linear das variantes que consistem na minimização da duração da rota com e sem tempos de espera;

Por sua vez, o MFA mostrou ser a mais adequado para:

- A obtenção da solução ótima das variantes com o objetivo de minimizar a duração da rota, com e sem tempos de espera;
- A resolução da relaxação linear da variante que consiste na minimização da distância total percorrida, com tempos de espera;
- A obtenção da solução ótima e da relaxação linear do problema com o objetivo de minimização da distância total percorrida, com limite máximo de visita a cada cliente.

Nos diversos problemas com janelas temporais, o pré-processamento do CPLEX revelou-se bastante robusto na produção dos primeiros limites inferiores, com valores de *gap* bastante reduzidos, por comparação com os correspondentes valores de relaxação linear com e sem desigualdades válidas adicionais. Esta observação verificou-se em ambos os modelos e nas três variantes consideradas. No entanto, nos problemas com janelas temporais em que o limite inferior é sempre 0, ou seja, considerando apenas o instante máximo de visita a cada cliente, os limites inferiores calculados pelo pré-processamento do CPLEX são obtidos com o simples recurso ao cálculo da relaxação linear do modelo aplicado.

Além do que foi referido, foi observado que o valor de *gap* do RRB aumenta com o aumento da amplitude da janela temporal, nas diversas variantes. Este primeiro limite inferior para o valor ótimo, obtido pelo pré-processamento do CPLEX, apresenta valores de *gap*, mais reduzidos nas variantes que consistem na minimização da duração da rota com e sem tempos de espera. Em muitos casos, apresenta valores de *gap* iguais a 0%, em ambos os modelos.

Ao fazer variar a amplitude das janelas temporais, aumentando e reduzindo respetivamente o limite superior e inferior de cada janela, foi observado que pode produzir diferentes resultados de acordo com a variante aplicada. Em média, na variante com o objetivo de minimizar a distância total percorrida, com tempo de espera, verifica-se que o aumento da amplitude da janela temporal, quer provocado

pela diminuição do limite inferior da janela temporal a , quer provocado pelo aumento do limite superior da janela temporal b , leva a uma redução da distância total da rota relativamente semelhante em ambos os casos. Por sua vez, nas variantes que consistem na minimização a duração da rota, com e sem tempos de espera, verifica-se que o aumento da amplitude da janela temporal provocado pela diminuição do limite inferior da janela temporal a , permite uma redução acentuada da duração da rota. No entanto, esta mantém-se praticamente inalterada, no aumento da amplitude provocado pelo aumento do limite superior da janela temporal b .

Em geral, foi observado que o aumento da amplitude da janela temporal, para cada valor de n , em média, provoca:

- Diminuição da distância total percorrida e da duração da rota;
- Aumento do tempo que o veículo está em espera;
- Aumento dos valores de *gap* da relaxação linear;
- Aumento dos tempos de processamento para obter a solução ótima;
- Aumento do valor de *gap* do RRB;

Este efeito, do aumento da amplitude das janelas temporais, verifica-se em ambos os modelos, o que levou à diminuição do número de instâncias resolvidas com o aumento do valor de n , no tempo máximo de processamento considerado. Esta observação é transversal às diversas variantes em estudo.

Referências

- [1] P. E. e. d. Conselho, “Directiva 2006/32/CE,” *Jornal Oficial da União Europeia* pp. L 114/64-85 de 27 de Abril de 2006..
- [2] “EEA - European Environment Agency (2010) Towards a resource-efficient transport system,” 2010. [Online]. Available: <http://www.eea.europa.eu/publications/towards-a-resource-efficient-transport-system>.
- [3] INE, “Estatísticas dos Transportes,” 2011. [Online]. Available: https://www.ine.pt/ngt_server/attachfileu.jsp?look_parentBoui=127621581&att_display=n&att_download=y.
- [4] AECOM, “Collection and Analysis of Data on the Structure of the Road Haulage Sector in the European Union,” 2014. [Online]. Available: http://ec.europa.eu/transport/modes/road/studies/road_en.htm.
- [5] E. -. E. E. Agency, “Towards a resource-efficient transport system,” 2010. [Online]. Available: <http://www.eea.europa.eu/publications/towards-a-resource-efficient-transport-system>.
- [6] Dantzig, G. B., Ramser, J. H., “The truck dispatching problem,” *Management Science*, vol. 6, nº 1, pp. 80-91, 1959.
- [7] Golden, B., Raghavan, S., Wasil, E., “The vehicle routing problem,” *Springer*.
- [8] Toth, P., Vigo, D., “The vehicle routing problem,” *SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications*, Philadelphia, 2002.
- [9] Applegate, D. L., Bixby, R. E., Chvátal, V. e Cook, W. J., “The traveling salesman problem: a computational study,” *Princeton University*, 2006.
- [10] Laporte, G., “What you should know about the vehicle routing problem,” *Naval Research Logistics* , nº 54, pp. 811-819, 2007.
- [11] Naddef, D., Rinaldi, G., “Branch-and-cut algorithms for the capacitated VRP,

-
- in P. Toth e D. Vigo, The Vehicle Routing Problem,” *SIAM Monographs on Discret Mathematics and Applications*, Philadelphia, pp. 53-84, 2002.
- [12] Cornuéjols, G. e Harche, F., “Polyhedral study of the capacitated vehicle routing problem,” *Mathematical Programming* , vol. 60, n° 1, pp. 21-52, 1993.
- [13] Naddef, D. e Rinaldi, G., “The symmetric traveling salesman polytope and its graphical relaxation:composition of valid inequalities,” *Mathematical Programming*, vol. 51, pp. 359-400, 1991.
- [14] Naddef, D. e Rinaldi, G., “The graphical relaxation: a new framework for the symmetric travelling salesman polytope,” *Mathematical Programming*, vol. 58, pp. 53-88, 1993.
- [15] Araque, J. R., Hall, L. A. e Magnanti, T. L., “Capacitated trees, capacitated routing, and associated polyhedra, Discussion paper,” *Center for Operations Research and Econometrics, Catholic University of Louvain, Belgium.*, 1990.
- [16] Ocan, T., A. I. e Laporte, G. , “A comparative analysis of several symmetric travelling salesman formulations,” *Computers and Operations Research*, vol. 36, pp. 637-654, 2009.
- [17] Solomon, M.M.; Desrosiers, J., “Time window constrained routing and scheduling problem,” *Transportation Science*, vol. 22, n° 1, pp. 1-13, 1988.
- [18] Papadimitriou, C. , “The euclidean traveling salesman problem is np-complete,” *Theoretical Computer Science*, vol. 4, pp. 237-244, 1977.
- [19] Solomon, M. M., “Algorithms for the vehicle routing and scheduling problems with time windows constraints,” *Operations Research*, vol. 35, n° 2, pp. 254-265, 1987.
- [20] El-Sherbeny, N., Tuytens, D., “Optimization multicriteria of routing problem,” *Troisieme Journee de Travail sur la Programming Mathematique Multi-objective, Faculte Polytechnique de Mons, Belgique*, 2001.
- [21] Tuytens, D., Teghem, J., El-Sherbeny, N., “A particular multiobjective vehicle routing problem solved by simulated annealing. Springer-Verlag, Germany,” *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, vol. 535, p. 133–152, 2004.
- [22] Desaulniers, G., Lavigne, J., Soumis, F., “Multi-depot vehicle scheduling problem with time windows and waiting costs,” *European Journal of Operation Research*, vol. 111, p. 479–494, 1997.

-
- [23] Tansini, L. e Viera, O. , “ Adapted clustering algorithms for the assignment problem in the MDVRPTW,” *Universidad de la República, Uruguai.*, 2004.
 - [24] Christiansen, M., Fagerholt, K., Rachaniotis, N. R., Tveit, I. and Overdal, M. V., “A decision support model for routing and scheduling a fleet of fuel supply vessels,” *Lecture Notes in Computer Science - Computational Logistics, Berlin*, vol. 9335, pp. 46-60, 2015.
 - [25] Kallehauge, B. , “Formulations and exact algorithms for the vehicle routing problem with time windows,” *Computer & Operations Research*, vol. 35, pp. 2307-2330, 2007.
 - [26] Cordeau J-F, Iori M, Laporte G, Salazar-González JJ, “A branch-and-cut algorithm for the pickup and delivery traveling salesman problem with LIFO,” 2007.
 - [27] Dumes, Y., Desrosiers, J., Soumis, F., “The pickup and delivery problem with time windows,” *European Journal of Operation Research*, vol. 54, pp. 7-21, 1991.
 - [28] Kolen, A.W.J.; Rinnooy, A.H.G.; Trienekens, H.W.J.M., “Vehicle routing with time windows,” *Operations Research*, vol. 35, pp. 266-273, 1987.
 - [29] Desrochers, M.; Desrosiers, J.; Solomon, M., “ A new optimization algorithm for the vehicle routing problem with time windows.,” *Operations Research*, vol. 40, nº 2, pp. 342-354, 1992.
 - [30] Bard, J.F.; Kontoravdis, G.; Yu, G. , “A branch-and-cut procedure for the vehicle routing problem with time windows,” *Transportation Science*, vol. 36, nº 2, pp. 250-269, 2002.
 - [31] Thompson, P.M.; Psaraftis, H.N. , “Cyclic transfer algorithms for multivehicle routing and scheduling problems,” *Operations Research*, vol. 41, nº 5, 1993.
 - [32] Potvin, J.Y.; Rousseau, J.M., “ An exchange heuristic for routing problems with time windows,” *Journal of the Operational Research Society*, vol. 46, nº 12, pp. 1433-1446, 1995.
 - [33] Cunha, C. B., “Uma contribuição para o problema de roteirização de veículos com restrições operacionais. Tese.,” *Escola Politécnica, Universidade de São Paulo*, 1997.
 - [34] Schulze, J., Fahle, T., “ A parallel algorithm for the vehicle routing problem with time windows constraints,” *Annals of Operations Research* , vol. 86, p.

585–607, 1999.

- [35] Chiang, W.C.; Russell, R.A., “A reactive tabu search metaheuristic for the vehicle routing problem with time windows,” *Journal on Computing*, vol. 9, n° 4, pp. 417-430, 1997.
- [36] Potvin, J.Y.; Kervahut, T.; Garcia, B.L.; Rousseau, J.M., “The vehicle routing problem with time windows, tabu search,” *Journal on Computing*, vol. 8, n° 2, pp. 158-172, 1996.
- [37] Badeau, P.; Guertin, F.; Gendreau, M.; Potvin, J.Y.; Taillard, E., “ A parallel tabu search heuristic for the vehicle routing problem with time windows,” *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, vol. 5, n° 2, pp. 109-122, 1997.
- [38] Potvin, J.Y.; Bengio, S., “The vehicle routing problem with time windows, Genetic Search,” *Journal on Computing*, vol. 8, n° 2, pp. 165-172, 1996.
- [39] Tan, K. C; Lee, L.H.; Zhu, Q. L.; OU, K. , “Heuristic methods for vehicle routing problem with time windows,” *Artificial Intelligence in Engineering*, vol. 15, n° 3, pp. 281-295, 2001.
- [40] Desrosiers, J., Dumas, Y., Soumis, F., Solomon, M. M., “Time constrained routing and scheduling,” *Network Routing of Handbooks in Operations Research and Management Science*, vol. 8, pp. 35-139, 1995.
- [41] Desrochers, M., Laporte, G., “Improvements and extensions to the Miller-Tucker-Zemlin subtour elimination constraints,” *Operations Research Letters*, vol. 10, pp. 27-36, 1991.
- [42] Dumas, Y., Desrosiers, J., Gelinas, E., Solomon, M., “An optimal algorithm for the travelling salesman problem with time windows,” *Operations Research* , vol. 43, n° 2, pp. 367-371, 1995.
- [43] López-Ibáñez, M., Blum, C., “Benchmark instances for the travelling salesman problem with time windows (TSPTW),” 2016. [Online]. Available: <http://lopez-ibanez.eu/tsptw-instances>.

Apêndice A

Resultados Completos

Neste capítulo é disponibilizado ao leitor todos os testes computacionais realizados no decorrer da presente dissertação. Para cada variante considerada para o TSPTW, é dedicada uma sub-seção onde são disponibilizados todos os resultados computacionais efetuados. Estes, consistem na resolução das instâncias de referência e na resolução da relaxação linear para cada modelo.

Assim, na primeira linha das tabelas que se seguem, encontra-se a designação do modelo aplicado. A primeira coluna é referente à identificação da instância, representada na forma de $n.w.i$ (n representa o número de clientes, w representa a amplitude da janela temporal, em unidades de tempo, e i o número da instância).

No caso das tabelas referentes à resolução das instâncias para cada variante, as colunas designadas por \hat{V} representam o correspondente valor ótimo. As colunas **Tempo** referem-se ao tempo para a obtenção da solução ótima. Por sua vez, as colunas com o nome **T.E.** são referentes à percentagem do tempo total da rota em que o veículo se encontra em espera. Por fim, as colunas **RRB** correspondem ao valor do primeiro limite inferior obtido.

Relativamente às tabelas referentes à resolução da relaxação linear dos modelos MTZ e MFA, estão divididas entre os resultados da relaxação linear com e sem desigualdades válidas (**D.V.**) para cada formulação. Assim, além da primeira coluna que identifica a instância, as colunas designadas por **LP** referem-se ao valor obtido da relaxação linear. As colunas designadas por **Tempo**, indicam o tempo de obtenção da solução da relaxação linear e, por fim, as colunas referenciadas por **GAP** representam o valor de *gap* da correspondente solução. Em algumas das instâncias mais difíceis, a resolução da relaxação linear com a aplicação das desigualdades válidas adicionais obtém-se um erro após um período de tempo. É uma situação identificada pela comunidade do *software* utilizado, mas ainda sem resolução, à data de conclusão da presente dissertação. Nas instâncias em que esta situação acontece, está identificada com *error*.

A.1 Resultados obtidos com vista à minimização da distância total percorrida com tempos de espera

Nesta sub-secção são apresentados os resultados obtidos na variante com o objetivo de minimizar a distância total, com tempos de espera. Na tabela A.1, é apresentado o valor ótimo obtido para cada instância, respeitando o tempo máximo de processamento de 2 horas. A tabela A.2 é referente aos valores obtidos da resolução da relaxação linear para cada instância, em cada modelo.

Tabela A. 1: Resultados obtidos pelos modelos MTZ e MFA na variante com o objetivo de minimizar a distância total percorrida com tempos de espera

<i>Instância</i>	Miller – Tucker – Zemlin				Modelo de Fluxo Agregado			
	<i>\hat{V}</i>	<i>Tempo</i>	<i>T.E.</i>	<i>RRG</i>	<i>\hat{V}</i>	<i>Tempo</i>	<i>T.E.</i>	<i>RRG</i>
20.20.01	378	0,02	21	354	378	0,09	30	373,1
20.20.02	286	0,02	31	286	286	0,05	32	286
20.20.03	394	0,48	23	394	394	0,06	23	386,7
20.20.04	396	0,02	11	396	396	0,05	12	396
20.20.05	352	0,01	23	317	352	0,05	23	352
20.60.01	335	0,22	100	276	335	0,47	101	284,2
20.60.02	244	0,03	60	230,9	244	0,25	77	232,5
20.60.03	352	0,05	38	325,3	352	0,28	54	336,7
20.60.04	280	0,16	96	233,4	280	1,26	92	235
20.60.05	338	0,11	54	288,5	338	0,47	108	273,3
40.20.01	497	0,19	47	449,1	497	0,69	50	484,8
40.20.02	552	0,11	60	522,6	552	0,62	60	546,1
40.20.03	478	0,11	50	451,9	478	0,64	50	468,2
40.20.04	404	0,08	50	387,3	404	0,47	51	386,8
40.20.05	499	0,08	39	470,6	499	0,51	40	471,7
40.60.01	494	17,9	114	406,9	494	176,87	114	416,9
40.60.02	470	2,5	39	361,2	470	5,82	68	369,6
40.60.03	393	6,36	75	304,4	393	41,9	127	329
40.60.04	382	4,1	113	322,6	382	23,3	123	315,6
40.60.05	328	1,26	150	259,3	328	3,07	180	267
60.20.01	551	0,45	35	528,2	551	9,81	50	517,6
60.20.02	605	0,26	67	563,4	605	2,28	68	568,9
60.20.03	532	0,47	74	503,2	532	5,62	74	510
60.20.04	616	0,36	68	593,3	616	5,9	68	585,6
60.20.05	603	0,34	34	577,5	603	3,29	35	576,3
60.60.01	609	1,51	138	539,6	609	12,2	139	557,8
60.60.02	566	38,53	192	444,4	566	536,57	193	455,1
60.60.03	485	41,32	139	417,6	467,3*	7200		423,9
60.60.04	571	25,49	112	423,6	571	2035	113	435,1
60.60.05	569	1,15	122	509,3	569	70,47	128	526
80.20.01	616	1,26	124	573	616	12,17	124	581,4
80.20.02	736	0,75	75	673,8	736	12,73	76	683,8
80.20.03	667	0,92	60	592,4	667	25,43	81	588,6
80.20.04	615	0,62	86	583,4	615	40,8	92	576,7

Continua na próxima página

	Miller – Tucker – Zemlin				Modelo de Fluxo Agregado			
<i>Instância</i>	<i>\hat{V}</i>	<i>Tempo</i>	<i>T. E.</i>	<i>RRG</i>	<i>\hat{V}</i>	<i>Tempo</i>	<i>T. E.</i>	<i>RRG</i>
80.20.05	748	0,33	61	708,5	748	9,25	67	705,1
80.60.01	554	906,62	120	444,4	554	554,77	183	449,9
80.60.02	628	6146	140	546,2	628	242,1	141	541,3
80.60.03	649	2147,8	123	579,4	649*	7200		542,6
80.60.04	612*	7200		488,8	**	> 7200		482,6
80.60.05	**	> 7200		431,9	**	> 7200		449,8
100.20.01	738	5,82	95	671,5	738	39,75	97	680,6
100.20.02	714	1,22	101	661	714	66,28	100	659,3
100.20.03	762	3,43	78	677,4	762	229,38	78	696,2
100.20.04	799	13,62	38	743,2	799	339	37	742,8
100.20.05	768	7,1	69	712,9	768	4721,1	74	712,2
100.60.01	**	> 7200		544,1	**	> 7200		564,1
100.60.02	**	> 7200		493,8	**	> 7200		495,3
100.60.03	**	> 7200		615,8	**	> 7200		601,1
100.60.04	**	> 7200		647,3	**	> 7200		656
100.60.05	661	56,36	189	561,6	661	1230,2	189	566,8
150.20.01	925	36,32	115	832,2	**	> 7200		843,2
150.20.02	864	34,6	117	758,7	852,4*	7200		795,5
150.20.03	832	3,62	150	773,3	832	823,39	151	775,1
150.20.04	873	13,2	115	813	873	783,5	115	813,8
150.20.05	836	698,1	123	750	**	> 7200		755,5
150.60.01	**	> 7200		695,2	**	> 7200		713,5
150.60.02	**	> 7200		638,2	**	> 7200		652,7
150.60.03	**	> 7200		627,2	**	> 7200		641,3
150.60.04	**	> 7200		668	**	> 7200		676,4
150.60.05	**	> 7200		718,4	**	> 7200		700,6
200.20.01	1020*	7200		912,4	**	> 7200		907,3
200.20.02	**	> 7200		828,2	**	> 7200		835,5
200.20.03	1042	339,08	144	908,8	**	> 7200		928,4
200.20.04	984	551,17	157	864,2	**	> 7200		874,5
200.20.05	1020	515,3	104	887,9	**	> 7200		911,1

Tabela A. 2: Resultados obtidos pelos modelos MTZ e MFA na resolução da relaxação linear com a variante que consiste em minimizar a distância total percorrida com tempos de espera

	Miller – Tucker – Zemlin						Modelo de Fluxo Agregado					
	<i>Com D. V.</i>			<i>Sem D. V.</i>			<i>Com D. V.</i>			<i>Sem D. V.</i>		
<i>Instância</i>	<i>LP</i>	<i>Temp</i>	<i>GAP</i>	<i>LP</i>	<i>Temp</i>	<i>GAP</i>	<i>LP</i>	<i>Temp</i>	<i>GAP</i>	<i>LP</i>	<i>Temp</i>	<i>GAP</i>
20.20.01	215	0,9	43%	210	0,67	44%	289	0,8	23%	277	0,73	27%
20.20.02	174	1,1	39%	159	0,4	44%	228	0,9	20%	220	0,4	23%
20.20.03	211	0,8	46%	206	0,3	48%	309	0,9	21%	288	0,56	27%
20.20.04	214	1,04	46%	204	0,39	48%	350	1,1	11%	319	0,8	19%
20.20.05	200	1,4	43%	185	0,5	47%	269	0,9	23%	220	0,42	37%
20.60.01	161	0,8	52%	125	0,4	62%	216	0,8	35%	199	0,51	40%
20.60.02	155	0,8	36%	133	0,3	45%	191	0,7	21%	175	0,48	28%
20.60.03	174	0,8	50%	150	0,3	57%	233	0,9	33%	224	0,39	36%
20.60.04	152	1,1	45%	123	0,3	56%	183	1,6	34%	168	0,3	40%
20.60.05	184	0,9	45%	135	0,5	60%	214	0,8	36%	196	0,3	42%
40.20.01	253	4,1	49%	226	0,53	54%	414	4,9	17%	373	1,0	25%
40.20.02	247	4,04	55%	220	0,62	60%	434	4,1	21%	373	1,1	32%
40.20.03	273	4,02	43%	267	0,8	44%	370	4,9	23%	330	0,9	31%

Continua na próxima página

	Miller – Tucker – Zemlin						Modelo de Fluxo Agregado					
	Com D. V.			Sem D. V.			Com D. V.			Sem D. V.		
<i>Instância</i>	<i>LP</i>	<i>Temp</i>	<i>GAP</i>	<i>LP</i>	<i>Temp</i>	<i>GAP</i>	<i>LP</i>	<i>Temp</i>	<i>GAP</i>	<i>LP</i>	<i>Temp</i>	<i>GAP</i>
40.20.04	221	4,3	45%	201	0,7	50%	332	5,4	18%	310	1,1	23%
40.20.05	261	3,9	48%	238	0,8	52%	364	5,2	27%	316	0,8	37%
40.60.01	226	4,1	54%	204	0,6	59%	293	5,1	41%	247	0,8	50%
40.60.02	257	4,1	45%	235	0,5	50%	317	4,7	32%	291	0,9	38%
40.60.03	221	4,01	44%	191	0,4	51%	295	5,3	25%	243	0,7	38%
40.60.04	214	4,2	44%	177	0,5	54%	305	4,7	20%	270	1,0	29%
40.60.05	205	401	37%	182	0,6	45%	268	5,3	18%	233	0,9	29%
60.20.01	305	12,6	45%	287	0,7	48%	400	19,0	27%	366	1,5	34%
60.20.02	314	12,7	48%	281	0,8	53%	459	19,4	24%	366	1,5	40%
60.20.03	315	12,6	41%	293	0,59	45%	417	21,5	22%	389	1,5	27%
60.20.04	322	14,1	48%	304	0,85	51%	509	18,9	17%	476	1,8	23%
60.20.05	307	13,2	49%	290	1,1	52%	543	23,0	10%	472	1,3	22%
60.60.01	326	12,7	46%	294	0,7	52%	476	20,4	22%	395	1,6	35%
60.60.02	314	12,6	44%	269	0,65	52%	422	20,1	26%	380	1,4	33%
60.60.03	281	12,4	42%	256	0,92	47%	389	18,9		360	1,2	
60.60.04	292	13,1	49%	261	0,8	54%	369	20,9	35%	345	1,5	40%
60.60.05	314	13,2	45%	278	1,14	51%	434	18,8	24%	398	1,2	30%
80.20.01	327	30,2	47%	290	1,1	53%	490	45,4	21%	417	3,6	32%
80.20.02	360	29,8	51%	337	1	54%	574	52,3	22%	527	3,7	28%
80.20.03	339	29,8	49%	316	1,01	53%	532	55,8	20%	439	3,5	34%
80.20.04	354	30,6	42%	330	1	46%	502	56,2	18%	468	3,2	24%
80.20.05	364	31,7	51%	341	1,3	54%	575	69,1	23%	527	3,1	30%
80.60.01	297	29,3	46%	255	1,03	54%	434	50,9	22%	367	3,0	34%
80.60.02	321	29,2	49%	291	0,9	54%	478	39,1	24%	450	3,5	28%
80.60.03	313	32,4	52%	283	1,09	56%	461	40,5		397	3,1	
80.60.04	310	30,8		272	1		436	52,3		389	3,1	
80.60.05	333	30,7		300	1,3		401	55,0		364	2,8	
100.20.01	415	38	44%	381	1,3	48%	584	161	21%	506	5,4	31%
100.20.02	377	39	47%	348	1,5	51%	543	159	24%	501	4,7	30%
100.20.03	398	42,2	48%	369	1,3	52%	568	132	25%	527	6,1	31%
100.20.04	415	52,3	48%	392	1,38	51%	641	130	20%	601	6,6	25%
100.20.05	409	67,1	47%	395	1,8	49%	620	142	19%	584	6,0	24%
100.60.01	346	38,1		290	1,3	56%	462	135		395	4,6	
100.60.02	346	42,2		307	1,37	53%	475	118		422	3,9	
100.60.03	360	39		318	1,3	57%	529	121		473	4,9	
100.60.04	356	56,1		323	1,4	58%	570	132		523	5,3	
100.60.05	382	72,6	42%	348	1,9	47%	564	151	15%	520	4,6	21%
150.20.01	467	176	50%	432	2,6	53%	760	914		667	19,4	
150.20.02	457	157	47%	419	2,68	51%	693	719		629	17,6	
150.20.03	486	166	42%	454	2,4	45%	738	608	11%	618	16,7	26%
150.20.04	464	172	47%	432	2,5	51%	736	600	16%	626	17,7	28%
150.20.05	error	182		430	2,8	49%	729	782		655	18,1	
150.60.01	429	222		387	2,3		622	644		548	13,3	
150.60.02	446	186		393	1,8		646	702		558	12,4	
150.60.03	435	149		392	2,02		564	602		515	11,1	
150.60.04	422	206		372	1,8		573	661		518	11,6	
150.60.05	431	182		379	1,7		579	684		508	11,2	
200.20.01	535	1141		496	4,6		error	3600		697	33,6	
200.20.02	517	1441		474	5,5		720	3521		633	42,3	
200.20.03	error	1260		490	4,5	53%	840	3552		674	40,6	
200.20.04	error	960		494	4,3	50%	780	3181		709	39,0	
200.20.05	error	1501		497	5,3	51%	812	3120		715	42,1	

A.2 Resultados obtidos com vista à minimização da duração da rota com tempos de espera

Na presente sub-secção são apresentados os resultados obtidos na variante com o objetivo de minimizar a duração da rota, com tempos de espera. Na tabela A.3, é apresentado o valor ótimo obtido para cada instância, respeitando o tempo máximo de processamento de 2 horas. A tabela A.4 é referente aos valores obtidos da resolução da relaxação linear para cada instância, em cada modelo.

Tabela A. 3: Resultados obtidos pelos modelos MTZ e MFA na variante com o objetivo de minimizar a duração da rota com tempos de espera

<i>Instância</i>	Miller – Tucker – Zemlin				Modelo de Fluxo Agregado			
	<i>\hat{V}</i>	<i>Tempo</i>	<i>T.E.</i>	<i>RRG</i>	<i>\hat{V}</i>	<i>Tempo</i>	<i>T.E.</i>	<i>RRG</i>
20.20.01	387	0,02	5	387	387	0,06	5	387
20.20.02	296	0,02	10	296	296	0,05	1	296
20.20.03	403	0,06	9	403	403	0,08	7	403
20.20.04	401	0,02	3	401	401	0,05	3	401
20.20.05	365	0,01	3	365	365	0,05	4	365
20.60.01	400	0,11	10	400	400	0,47	10	400
20.60.02	300	0,2	1	291,9	300	0,33	43	218,5
20.60.03	381	0,05	0	378,2	381	0,16	0	381
20.60.04	337	0,14	13	337	337	0,25	44	337
20.60.05	392	0,3	40	380	392	0,25	49	387,7
40.20.01	520	0,16	19	520	520	0,76	15	520
40.20.02	607	0,13	21	607	607	0,87	19	607
40.20.03	514	0,13	16	514	514	0,78	10	514
40.20.04	442	0,09	22	442	442	0,48	17	442
40.20.05	520	0,38	11	520	520	0,44	14	520
40.60.01	535	58,81	4	535	535	48,06	15	535
40.60.02	509	105,21	7	474,2	509	14,03	14	485,9
40.60.03	465	179,3	10	464	465	256,98	21	463
40.60.04	475	522,3	4	467,5	475	28,03	19	460
40.60.05	423	13,04	42	389	423	22,8	37	279
60.20.01	586	0,44	26	583,5	586	9,08	21	586
60.20.02	656	0,45	24	656	656	2,87	31	656
60.20.03	593	0,42	28	592	593	26,36	43	592,2
60.20.04	670	0,36	17	670	670	28,17	7	670
60.20.05	629	1,15	19	629	629	4,85	17	629
60.60.01	722	3125	43	722	722	65,6	50	722
60.60.02	**	> 7200		715	715	849,13	31	715
60.60.03	**	> 7200		619	**	> 7200		619
60.60.04	623*	7200		621	**	> 7200		621
60.60.05	**	> 7200		669	669	3255	61	669
80.20.01	729	3,09	65	729	729	34,37	74	729
80.20.02	798	3,59	26	798	798	42,51	15	798
80.20.03	727	6,57	28	722	727	29,91	25	727
80.20.04	694	1,75	29	694	694	132,4	30	694

Continua na próxima página

<i>Instância</i>	Miller – Tucker – Zemlin				Modelo de Fluxo Agregado			
	<i>\hat{V}</i>	<i>Tempo</i>	<i>T.E.</i>	<i>RRG</i>	<i>\hat{V}</i>	<i>Tempo</i>	<i>T.E.</i>	<i>RRG</i>
80.20.05	793	1,89	17	793	793	12,5	29	793
80.60.01	**	> 7200		653	**	> 7200		494,4
80.60.02	**	> 7200		733	733	3816	36	713,1
80.60.03	**	> 7200		737	743	5039	8	730
80.60.04	**	> 7200		676	718	2943	9	682,4
80.60.05	**	> 7200		682	**	> 7200		682
100.20.01	827	5,66	54	827	827	57,3	38	827
100.20.02	801	47,16	32	801	801	92,31	40	801
100.20.03	834	2,31	23	834	834	377,94	27	834
100.20.04	828	12,26	6	828	828	243	12	828
100.20.05	825	12,56	22	825	825	682,4	28	825
100.60.01	**	> 7200		823,06	**	> 7200		824
100.60.02	**	> 7200		782	**	> 7200		782
100.60.03	**	> 7200		856	**	> 7200		856
100.60.04	**	> 7200		834	**	> 7200		834
100.60.05	**	> 7200		790	**	> 7200		790
150.20.01	**	> 7200		1034	**	> 7200		1034
150.20.02	967	646,1	9	967	967	1258,6	27	967
150.20.03	**	> 7200		959	959	5510	38	959
150.20.04	975	92,52	38	975	**	> 7200		975
150.20.05	**	> 7200		957	957	2058,2	42	957
150.60.01	**	> 7200		1009	**	> 7200		1009
150.60.02	**	> 7200		935	**	> 7200		920,7
150.60.03	**	> 7200		984	**	> 7200		984
150.60.04	**	> 7200		998	**	> 7200		998
150.60.05	**	> 7200		996	**	> 7200		996
200.20.01	**	> 7200		1139	**	> 7200		1139
200.20.02	**	> 7200		1124	**	> 7200		1124
200.20.03	**	> 7200		1178	**	> 7200		1178
200.20.04	**	> 7200		1125	**	> 7200		1125
200.20.05	**	> 7200		1121	**	> 7200		1123

Tabela A. 4: Resultados obtidos pelos modelos MTZ e MFA na resolução da relaxação linear com a variante que consiste em minimizar a duração da rota com tempos de espera

<i>Instância</i>	Miller – Tucker – Zemlin			Modelo de Fluxo Agregado					
	<i>Sem D.V.</i>			<i>Com D.V.</i>			<i>Sem D.V.</i>		
	<i>LP</i>	<i>Temp</i>	<i>GAP</i>	<i>LP</i>	<i>Temp</i>	<i>GAP</i>	<i>LP</i>	<i>Temp</i>	<i>GAP</i>
20.20.01	361	0,1	7%	357	0,9	8%	353	0,6	9%
20.20.02	296	0,1	0%	254,4	0,9	14%	247,3	0,4	16%
20.20.03	353	0,1	12%	370,8	0,8	8%	365	0,5	9%
20.20.04	374	0,1	7%	385,9	1,4	4%	383,7	0,4	4%
20.20.05	313	0,4	14%	346,6	1,07	5%	342	0,3	6%
20.60.01	325	0,1	19%	269,2	1,04	33%	257,4	0,4	36%
20.60.02	254	0,1	15%	219,4	0,9	27%	207,5	0,4	31%
20.60.03	326	0,2	14%	303,7	1,04	20%	301,9	0,3	21%
20.60.04	309	0,2	8%	233,7	1,6	31%	218,6	0,3	35%
20.60.05	334	0,5	15%	271,8	0,9	31%	266,8	0,4	32%
40.20.01	486	0,3	7%	454	5,6	13%	441,5	1,1	15%
40.20.02	554	0,4	9%	556	6	8%	546,7	0,9	10%
40.20.03	484	0,3	6%	468,8	5,3	9%	458,1	0,9	11%

Continua na próxima página

	Miller – Tucker – Zemlin			Modelo de Fluxo Agregado					
	Sem D. V.			Com D. V.			Sem D. V.		
<i>Instância</i>	<i>LP</i>	<i>Temp</i>	<i>GAP</i>	<i>LP</i>	<i>Temp</i>	<i>GAP</i>	<i>LP</i>	<i>Temp</i>	<i>GAP</i>
40.20.04	409	0,3	7%	391,7	5,2	11%	385,9	0,8	13%
40.20.05	466	1,1	10%	417,7	5,8	20%	376,8	0,8	28%
40.60.01	496	0,2	7%	353,6	5,6	34%	322,7	0,8	40%
40.60.02	451	0,3	11%	339,7	6	33%	312,7	0,9	39%
40.60.03	440	0,3	5%	336,1	5,6	28%	285	0,8	39%
40.60.04	429	0,3	10%	355,9	5,5	25%	346,5	1,4	27%
40.60.05	389	0,5	8%	299,2	6,7	29%	262,3	0,9	38%
60.20.01	563	0,4	4%	507,3	20,4	13%	480,7	1,9	18%
60.20.02	649	0,7	1%	587,2	19,1	10%	544,5	1,9	17%
60.20.03	575	0,5	3%	489	18,18	18%	478	1,6	19%
60.20.04	621	0,8	7%	593,4	22,1	11%	589,4	1,8	12%
60.20.05	584	1,2	7%	584,8	24,1	7%	552,3	1,5	12%
60.60.01	680	0,5	5,8%	596,4	23,2	17%	576,1	2,01	20%
60.60.02	668	0,5		421,6	29,4	41%	416,7	1,5	42%
60.60.03	560	0,4		414,5	26,8		377,5	1,5	
60.60.04	588	0,5		420,5	27,2		398,8	1,4	
60.60.05	619	1,1		503,9	27,2	25%	457,3	1,9	32%
80.20.01	690	0,8	5%	655,6	106	10%	644,1	4,3	12%
80.20.02	781	0,6	2%	741,7	71,1	7%	724,2	4,3	9%
80.20.03	690	0,7	5%	659	85,2	9%	577,2	4,5	21%
80.20.04	663	0,7	4%	621,6	88,3	10%	606,1	4,1	13%
80.20.05	764	1,7	4%	710	75,1	10%	705,8	4,7	11%
80.60.01	632	0,5		499,6	89,4		455,1	4,3	
80.60.02	651	0,6		553,6	81,3	24,5%	528,4	3,9	27,9%
80.60.03	704	0,7		533,6	78,5	28,2%	485,9	4,2	34,6%
80.60.04	643	0,8		525,1	82,1	26,9%	493,6	3,8	31,3%
80.60.05	653	1,4		442,7	81,2		409,6	3,9	
100.20.01	800	0,8	3%	743,3	207	10%	742,2	8,5	10%
100.20.02	773	1,1	3%	680	188,7	15%	678	7,2	15%
100.20.03	790	1,02	5%	751,4	124,7	10%	745,8	7,7	11%
100.20.04	798	1,02	4%	763,5	184,2	8%	758,8	9,1	8%
100.20.05	772	1,5	6%	717,9	311	13%	688,4	9,8	17%
100.60.01	786	0,9		524,9	228,1		480,3	6,2	
100.60.02	770	1,03		552,8	123,1		519,5	7,3	
100.60.03	780	0,9		686,4	258,2		663,1	9,1	
100.60.04	787	10,7		644	195		616,6	7,4	
100.60.05	742	1,6		602,4	376		558,8	6,8	
150.20.01	980	1,7	0,6%	960,03	1562,5		957,6	26,4	
150.20.02	961	1,7		884,7	2218,1	8,5%	884,7	28,7	8,5%
150.20.03	915	1,8		855,99	1682	10,7%	804,9	30,5	16,1%
150.20.04	933	1,7		894,5	1681		859,2	38,4	
150.20.05	946	2,7		932	1449	2,6%	932	23,9	2,6%
150.60.01	965	2,4		680,2	1862,0		643,1	19,1	
150.60.02	885	2,5		718,7	1680		659,6	19,8	
150.60.03	964	2,6		624,6	1621		578,3	19,6	
150.60.04	917	2,4		667	1622		629,1	20,4	
150.60.05	938	2,5		663	1381		604,9	17,7	
200.20.01	1095	4,9		**	> 7200		986	64,1	
200.20.02	1080	5,2		**	> 7200		973,8	60,1	
200.20.03	1154	4,7		**	> 7200		1078,1	1,01	
200.20.04	1091	4,5		**	> 7200		988,2	1,02	
200.20.05	1106	4,4		**	> 7200		930,5	1,07	

A.3 Resultados obtidos com vista à minimização da duração da rota sem tempos de espera

Na atual sub-secção são apresentados os resultados obtidos na variante com o objetivo de minimizar a duração da rota, sem tempos de espera. Na tabela A.5, é apresentado o valor ótimo obtido para cada instância, respeitando o tempo máximo de processamento de 2 horas. A tabela A.6 é referente aos valores obtidos da resolução da relaxação linear para cada instância, em cada modelo.

Tabela A. 5: Resultados obtidos pelos modelos MTZ e MFA na variante com o objetivo de minimizar a duração da rota sem tempos de espera

<i>Instância</i>	Miller – Tucker – Zemlin			Modelo de Fluxo Agregado		
	<i>\hat{V}</i>	<i>Tempo</i>	<i>RRG</i>	<i>\hat{V}</i>	<i>Tempo</i>	<i>RRG</i>
20.20.01	Imp.	0,05	403	Imp.	0,05	403
20.20.02	Imp.	0,06		Imp.	0,06	
20.20.03	406	0,03		406	0,06	
20.20.04	Imp.	0,2		Imp.	0,2	
20.20.05	Imp.	0,3		Imp.	0,3	
20.60.01	400	0,61	400	400	0,66	400
20.60.02	300	0,19	292,4	300	0,83	218,5
20.60.03	381	0,03	378,3	381	0,37	381
20.60.04	337	0,16	337	337	0,2	337
20.60.05	393	0,17	381,9	393	2,31	388
40.20.01	523	0,64	520	523	3,29	520
40.20.02	607	0,52	607	607	1,9	607
40.20.03	514	0,14	514	514	1,7	514
40.20.04	Imp.	0,06	535	Imp.	0,89	535
40.20.05	Imp.	0,16		Imp.	0,14	
40.60.01	535	430,44		535	25,88	
40.60.02	509	869,1		509	22,37	
40.60.03	465	628,31		465	1214,47	
40.60.04	475	1103,8	469,5	475	177,57	460
40.60.05	423	102,0	389	423	643,2	280,3
60.20.01	Imp.	3,95	629	Imp.	478,7	629
60.20.02	656	0,28		656	22,06	
60.20.03	593	1,25		593	115,1	
60.20.04	Imp.	0,03		Imp.	0,37	
60.20.05	629	1,48		629	51,59	
60.60.01	722	176,8	722	722	379,3	722
60.60.02	**	> 7200	715	715	2258,36	715
60.60.03	**	> 7200	619	623	1579	619
60.60.04	**	> 7200	621	**	> 7200	**
60.60.05	**	> 7200	669	669	493,1	669
80.20.01	Imp.	0,86		Imp.	151,4	
80.20.02	Imp.	0,03		Imp.	0,87	
80.20.03	Imp.	20,16		Imp.	1,5	
80.20.04	Imp.	3,88		Imp.	363,8	

Continua na próxima página

	Miller – Tucker – Zemlin			Modelo de Fluxo Agregado		
<i>Instância</i>	<i>\hat{V}</i>	<i>Tempo</i>	<i>RRG</i>	<i>\hat{V}</i>	<i>Tempo</i>	<i>RRG</i>
80.20.05	Imp.	1,24		Imp.	1,34	
80.60.01	**	> 7200	653	**	> 7200	506,3
80.60.02	**	> 7200	733	**	> 7200	528,4
80.60.03	**	> 7200	737	**	> 7200	739,5
80.60.04	**	> 7200	676	**	> 7200	682,4
80.60.05	**	> 7200	682	**	> 7200	682
100.20.01	827	55,6	827	827	60,09	827
100.20.02	**	> 7200	801	801	425,1	801
100.20.03	Imp.			Imp.	123,5	
100.20.04	828	927,1	828	828	1412	828
100.20.05	825	1499,6	825	825	1515,3	825
100.60.01	**	> 7200	823,2	**	> 7200	824
100.60.02	**	> 7200	782	**	> 7200	782
100.60.03	**	> 7200	856	**	> 7200	856
100.60.04	**	> 7200	834	**	> 7200	834
100.60.05	**	> 7200	790	**	> 7200	790
150.20.01	**	> 7200	1034	**	> 7200	1034
150.20.02	**	> 7200	967	967	5023,2	967
150.20.03	Imp	20,1		Imp	11,12	
150.20.04	**	> 7200	975	**	> 7200	975
150.20.05	Imp	0,41	1034	Imp	9,8	1034
150.60.01	**	> 7200	1009	**	> 7200	1009
150.60.02	**	> 7200	940	**	> 7200	920,9
150.60.03	**	> 7200	984	**	> 7200	984
150.60.04	**	> 7200	998	**	> 7200	998
150.60.05	**	> 7200	997	**	> 7200	996
200.20.01	**	> 7200	1139	**	> 7200	1139
200.20.02	**	> 7200	1124	**	> 7200	1124
200.20.03	**	> 7200	1178	**	> 7200	1178
200.20.04	**	> 7200	1125	**	> 7200	1125
200.20.05	**	> 7200	1122	**	> 7200	1123

Tabela A. 6: Resultados obtidos pelos modelos MTZ e MFA na resolução da relaxação linear com a variante que consiste em minimizar a duração da rota sem tempos de espera

	Miller – Tucker – Zemlin			Modelo de Fluxo Agregado					
	<i>Sem D. V.</i>			<i>Com D. V.</i>			<i>Sem D. V.</i>		
<i>Instância</i>	<i>LP</i>	<i>Temp</i>	<i>GAP</i>	<i>LP</i>	<i>Temp</i>	<i>GAP</i>	<i>LP</i>	<i>Temp</i>	<i>GAP</i>
20.20.01	361	0,4		357,1	1,3		353	0,6	
20.20.02	296	0,3		254,3	1,1		247,3	0,4	
20.20.03	353	0,2	13,1%	370,8	1,3	8,7%	365	0,6	10,1%
20.20.04	374	0,3		385,9	0,8		383,7	0,5	
20.20.05	313	0,5		346,6	1,1		342	0,5	
20.60.01	325	0,1	18,8%	269,2	0,9	32,7%	257,4	0,3	35,7%
20.60.02	254	0,1	15,3%	219,3	0,9	26,9%	207,5	0,4	30,8%
20.60.03	326	0,1	14,4%	303,7	0,9	20,3%	301,9	0,5	20,8%
20.60.04	309	0,1	8,3%	233,7	0,6	30,7%	218,6	0,5	35,1%
20.60.05	334	0,5	15,0%	271,8	0,9	30,8%	266,8	0,3	32,1%
40.20.01	486	0,3	7,1%	454	5,8	13,2%	441,5	1,1	15,6%
40.20.02	554	0,3	8,7%	556	6,1	8,4%	546,7	0,9	9,9%
40.20.03	484	0,2	5,8%	469	7,6	8,8%	458	1,01	10,9%

Continua na próxima página

	Miller – Tucker – Zemlin			Modelo de Fluxo Agregado					
	Sem D.V.			Com D.V.			Sem D.V.		
<i>Instância</i>	<i>LP</i>	<i>Temp</i>	<i>GAP</i>	<i>LP</i>	<i>Temp</i>	<i>GAP</i>	<i>LP</i>	<i>Temp</i>	<i>GAP</i>
40.20.04	409	0,6		391,7	4,5		385,9	1,1	
40.20.05	466	1,07		417,7	6,6		376,8	0,8	
40.60.01	496	0,3	7,3%	353,6	5,4	33,9%	322,7	0,9	39,7%
40.60.02	451	0,3	11,4%	339,7	5,3	33,3%	312,7	1,09	38,6%
40.60.03	440	0,4	5,4%	336,1	5,3	27,7%	285	0,8	38,7%
40.60.04	429	0,3	9,7%	355,9	4	25,1%	346,5	1,04	27,1%
40.60.05	389	0,9	8,0%	299,2	6,1	29,3%	308,1	0,9	31,5%
60.20.01	563	0,9		507,3	29,1		480,7	1,9	
60.20.02	649	0,5	1,1%	587,1	26	10,5%	544,5	1,9	17,0%
60.20.03	575	0,4	3,0%	488,9	23,1	17,6%	478	1,7	19,4%
60.20.04	621	0,7		593,6	37,7		589,4	1,6	
60.20.05	584	0,9	7,2%	584,8	31	7,0%	552,3	1,6	12,2%
60.60.01	680	0,5	5,8%	596,4	22,8	17,4%	576,1	1,4	20,2%
60.60.02	668	0,5		451,6	18,2	36,8%	416,7	1,9	41,7%
60.60.03	560	0,5		414,4	16,4	33,5%	377,5	1,4	39,4%
60.60.04	588	0,4		420,5	18,4		398,8	1,6	
60.60.05	619	1,1		503,9	27,2	24,7%	457,3	1,7	31,6%
80.20.01	690	1,08		655,6	72,1		644	4	
80.20.02	781	1,1		741,7	86,7		724,2	3,9	
80.20.03	690	1,17		659,1	91		577,2	4	
80.20.04	663	1,14		621,5	82,1		606,1	4,3	
80.20.05	764	1,2		710	84,1		705,8	4,6	
80.60.01	632	0,7		499,6	56,1		455,1	4	
80.60.02	651	0,7		553,6	62,6		528,4	3,6	
80.60.03	704	0,7		533,6	64,1		485,9	4,2	
80.60.04	643	0,7		525	59,1		493,6	4,4	
80.60.05	653	1,2		442,7	82,1		409,6	3,7	
100.20.01	800	1,02	3,3%	743,3	234	10,1%	742,2	6,5	10,3%
100.20.02	773	1,1		679,9	287	15,1%	678	7,8	15,4%
100.20.03	790	1,5		751,4	261		745,8	7,1	
100.20.04	798	1,02	3,6%	763,5	292	7,8%	758,9	7,8	8,3%
100.20.05	772	1,9	6,4%	717,9	283	13,0%	688,4	9,1	16,6%
100.60.01	786	1,02		524,9	169		480,3	6,1	
100.60.02	770	0,9		552,8	194		519,5	6,9	
100.60.03	780	0,8		686,4	214		663,1	8,3	
100.60.04	787	1,1		644	198		616,6	7,4	
100.60.05	742	1,8		602,4	162		558,8	6,6	
150.20.01	980	2,7		960	1245		957,6	24,6	
150.20.02	961	2,34	0,6%	884,7	2161	8,5%	884,7	24,2	8,5%
150.20.03	915	3,11		856	1381		804,9	27,2	
150.20.04	933	2,67		894,5	2123		859,2	27,6	
150.20.05	946	5,1		932	1920		932	23,4	
150.60.01	965	2,9		680,2	1321		643,1	19,4	
150.60.02	885	2,7		718,7	1442		659,6	19,1	
150.60.03	964	2,9		624,6	1621		578,3	18,7	
150.60.04	917	3,4		667	1202		629,1	18,7	
150.60.05	938	2,9		663	1261		604,9	15,8	
200.20.01	1095	6,8		**	>7200		986	66,1	
200.20.02	1080	6,9		984,3	7192		973,8	61,1	
200.20.03	1154	6,6		error	1201		1078,2	56	
200.20.04	1091	8,7		error	900		988,2	58,8	
200.20.05	1106	6,1		error	1261		930,5	68,1	

A.4 Resultados obtidos com vista à minimização da distância total percorrida com limite máximo de visita a cada cliente

Na presente sub-secção são apresentados os resultados obtidos na variante com o objetivo de minimizar a distância total percorrida com limite máximo de visita a cada cliente. Na tabela A.7, é apresentado o valor ótimo para cada instância, quando obtido no tempo máximo de processamento de 2 horas. A tabela A.8 é referente aos valores obtidos da resolução da relaxação linear para cada instância, em cada modelo.

Tabela A. 7: Resultados obtidos pelos modelos MTZ e MFA na variante que consiste em minimizar a distância total percorrida com limite máximo de tempo de visita a cada cliente

	Miller – Tucker – Zemlin			Modelo de Fluxo Agregado		
<i>Instância</i>	<i>\hat{V}</i>	<i>Tempo</i>	<i>RRG</i>	<i>\hat{V}</i>	<i>Tempo</i>	<i>RRG</i>
20.20.01	273	1116	199,5	273	352,8	177
20.20.02	216	1360	169,5	216	1909	142,8
20.20.03	254	268,3	190	254	20,39	188,7
20.20.04	253	201,6	184,5	253	643,1	167,48
20.20.05	209	1,8	183	209	4,96	153,4
20.60.01	184	1,7	158	184	2	112,67
20.60.02	164	0,2	144,5	164	0,3	154,9
20.60.03	232	2433	154,5	232	542,82	153
20.60.04	160	1,36	146,9	160	1,03	125,28
20.60.05	208	7,4	170,5	208	6,71	124,1
40.20.01	**	> 7200	170,5	**	> 7200	179,9
40.20.02	**	> 7200	175	254	43,2	179,8
40.20.03	289*	7200	238,2	289*	7200	237,2
40.20.04	**	> 7200	180	**	> 7200	184,5
40.20.05	**	> 7200	222	286	659,01	189,3
40.60.01	**	> 7200	202,5	**	> 7200	197,1
40.60.02	**	> 7200	218,1	311*	7200	222,3
40.60.03	**	> 7200	167,2	**	> 7200	171,9
40.60.04	239*	7200	174,3	239	47,5	182,2
40.60.05	**	> 7200	199	234	150,68	179,8
60.20.01	**	> 7200	285,5	**	> 7200	250,7
60.20.02	**	> 7200	282	**	> 7200	232,2
60.20.03	**	> 7200	295,5	**	> 7200	668,2
60.20.04	**	> 7200	275,1	**	> 7200	231,3
60.20.05	**	> 7200	268,5	**	> 7200	218
60.60.01	**	> 7200	315,5	**	> 7200	263
60.60.02	**	> 7200	305	330	515,9	250,9
60.60.03	**	> 7200	270	**	> 7200	248,8
60.60.04	**	> 7200	288,5	**	> 7200	245,4
60.60.05	**	> 7200	288	**	> 7200	254,2

Tabela A. 8: Resultados obtidos pelos modelos MTZ e MFA na resolução da relaxação linear com a variante que consiste em minimizar a distância total percorrida com limite máximo de tempo de visita a cada cliente

	Miller – Tucker – Zemlin			Modelo de Fluxo Agregado		
<i>Instância</i>	<i>LP</i>	<i>Temp</i>	<i>GAP</i>	<i>LP</i>	<i>Temp</i>	<i>GAP</i>
20.20.01	198	0,4	27,5%	198,5	1,2	27,3%
20.20.02	170	0,4	21,3%	171,2	0,8	20,7%
20.20.03	194,5	0,47	23,4%	203	0,9	20,1%
20.20.04	187,5	0,43	25,9%	188,9	0,6	25,3%
20.20.05	189	1,1	9,6%	190,5	1,1	8,9%
20.60.01	158	0,44	14,1%	161,4	0,8	12,3%
20.60.02	154	0,4	6,1%	157,5	0,8	4,0%
20.60.03	172	0,44	25,9%	179,6	0,7	22,6%
20.60.04	152,5	0,44	4,7%	154,6	0,6	3,4%
20.60.05	184,5	0,9	11,3%	186,8	0,9	10,2%
40.20.01	238	2,43		242,6	5	
40.20.02	228	2,47		232,8	4,8	8,3%
40.20.03	259	2,53		259,7	5	
40.20.04	211	2,55		213,9	4,2	
40.20.05	240	4,3		243	4,8	15,0%
40.60.01	225	2,49		225,4	5,2	
40.60.02	254	2,5		255,1	4,8	
40.60.03	219,5	2,57		221,2	4,8	
40.60.04	214	2,48		219,9	4,2	8,0%
40.60.05	204	4,1		210,1	4,7	10,2%
60.20.01	292	8		293,1	14,2	
60.20.02	287,5	8,01		290	15,3	
60.20.03	299	8,3		301,6	15	
60.20.04	281	7,9		283,7	18,1	
60.20.05	278,5	11,2		280,2	20,1	
60.60.01	321	8,4		321,7	17,8	
60.60.02	309	8,23		312,5	15,2	5,3%
60.60.03	276	8,15		279,7	16,1	
60.60.04	289	8,18		291,5	16,8	
60.60.05	310	11,2		311,4	21,1	

A.5 Resultados obtidos com a variação das janelas temporais

Por fim, nesta sub-seção são apresentados os resultados obtidos com a variação das janelas temporais, quer provocado pela variação do limite inferior a , quer provocado pela variação do limite superior b . As tabelas estão organizadas pelos modelos MTZ e MFA e de acordo com as três variantes consideradas – minimizar a distância total com tempos de espera, minimizar a duração da rota com e sem tempos de espera –

uma tabela para cada um dos dois casos considerados de variação da amplitude das janelas temporais.

Tabela A. 9: Resultados obtidos pelo modelo MTZ na variação do limite inferior da janela temporal a_j , com b_j fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a distância total percorrida, com tempos de espera

	−25%			−10%			−5%			+5%		
<i>Instância</i>	\hat{V}	<i>Ten</i>	<i>T.E.</i>	\hat{V}	<i>Temp</i>	<i>T.E.</i>	\hat{V}	<i>Temp</i>	<i>T.E.</i>	\hat{V}	<i>Temp</i>	<i>T.E.</i>
20.20.01	330	0,06	5	378	0,02	29	378	0,05	21	Imp.	9,31	
20.20.02	281	0,28	27	281	0,08	36	281	0,08	36	286	0,05	25
20.20.03	324	0,11	0	393	0,03	23	393	0,06	23	Imp.	0,02	
20.20.04	396	0,05	12	396	0,02	12	396	0,05	11	Imp.	0,02	
20.60.01	254	0,47	130	279	0,42	86	279	0,45	102	335	0,2	100
20.60.02	201	0,06	110	244	0,08	36	244	0,13	48	246	0,08	66
20.60.03	328	0,84	13	352	0,11	4	352	0,08	13	352	0,08	45
20.60.04	204	0,17	171	226	0,03	82	248	0,06	111	280	0,2	96
40.20.01	442	142	72	466	0,27	22	481	0,36	33	Imp.	0,03	
40.20.02	397	6,44	104	544	0,25	68	548	0,19	64	Imp.	0,01	
40.20.03	372	8,24	78	454	0,92	74	474	0,31	54	Imp.	0,01	
40.20.04	324	76	65	386	2,27	67	388	0,55	44	Imp.	0,01	
40.60.01	356	25,5	116	418	63,6	114	481	301	101	508	4,26	100
40.60.02	355	48,3	183	398	52,1	89	419	1,14	76	470	0,37	68
40.60.03	362	2230	158	376	403	68	390	12,7	126	Imp.	0,02	
40.60.04	292	6,83	114	369	6,57	81	382	9,22	90	406	1,48	102

Tabela A. 10: Resultados obtidos pelo modelo MTZ na variação do limite superior da janela temporal b_j , com a_j fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a distância total percorrida, com tempos de espera

	−5%			+5%			+10%			+25%		
<i>Instância</i>	\hat{V}	<i>Ten</i>	<i>T.E.</i>	\hat{V}	<i>Temp</i>	<i>T.E.</i>	\hat{V}	<i>Temp</i>	<i>T.E.</i>	\hat{V}	<i>Temp</i>	<i>T.E.</i>
20.20.01	Imp.	0,01		378	0,03	37	378	0,03	68	330	0,05	174
20.20.02	Imp.	0,01		279	0,03	54	266	0,03	82	266	0,11	44
20.20.03	Imp.	1,29		393	0,05	42	393	0,01	60	362	0,09	39
20.20.04	Imp.	0,01		396	0,01	27	389	0,09	50	389	0,09	113
20.60.01	335	0,33	80	279	0,56	123	279	0,39	140	259	0,36	138
20.60.02	249	0,02	58	244	0,05	60	244	0,08	60	207	0,06	107
20.60.03	352	0,06	29	352	0,06	29	352	0,17	29	327	0,39	93
20.60.04	280	0,27	79	248	0,05	125	226	0,03	111	219	0,16	199
40.20.01	Imp.	0,01		478	0,34	76	465	0,55	55	439	17,8	176
40.20.02	Imp.	0,01		548	0,44	93	544	0,14	125	435	1,56	167
40.20.03	Imp.	0,01		472	0,3	81	453	0,72	125	396	44,8	136
40.20.04	Imp.	0,01		388	0,2	72	386	0,81	56	334	8,05	150
40.60.01	Imp.	0,01		481	12,8	126	418	110	165	356	12,9	199
40.60.02	Imp.	3,04		419	0,97	90	391	33,4	142	362	13,7	202
40.60.03	Imp.	0,01		390	10,4	78	376	42,4	97	352	82,8	112
40.60.04	406	0,61	79	373	1,65	145	373	42,1	187	300	1,69	195

Tabela A. 11: Resultados obtidos pelo modelo MTZ na variação do limite inferior da janela temporal a_j , com b_j fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a duração da rota, com tempos de espera

	−25%			−10%			−5%			+5%		
<i>Instância</i>	\hat{V}	<i>Ten</i>	<i>T.E.</i>	\hat{V}	<i>Temp</i>	<i>T.E.</i>	\hat{V}	<i>Temp</i>	<i>T.E.</i>	\hat{V}	<i>Temp</i>	<i>T.E.</i>
20.20.01	335	0,13	3	379	0,03	1	381	0,02	1	Imp.	0,01	
20.20.02	281	2,06	0	284	0,16	3	286	0,09	5	311	0,19	25
20.20.03	324	0,44	0	393	0,08	-	394	0,03	1	Imp.	0,02	
20.20.04	396	0,09	0	396	0,02	-	396	0,02	-	Imp.	0,02	
20.60.01	317	1,59	27	365	1,79	26	381	0,28	44	416	0,16	27
20.60.02	247	1,96	1	277	0,62	10	289	0,13	6	311	0,17	35
20.60.03	337	3,96	0	356	0,52	4	365	0,08	1	397	0,03	20
20.60.04	267	2,51	1	308	0,83	2	322	0,5	1	352	0,06	41
40.20.01	466*	7200		487	23,2	2	505	5,87	5	Imp.	0,03	
40.20.02	474	116	7	584	15,8	12	592	1,36	1	Imp.	0,01	
40.20.03	421*	7200		483	7,15	4	496	1,12	4	Imp.	0,01	
40.20.04	334*	7200		410	8,39	13	424	0,36	1	Imp.	0,01	
40.60.01	**	> 7200		496	19,6	11	515	1342	1	555	12,2	27
40.60.02	**	> 7200		465	1752	14	493	248	5	525	595	
40.60.03	**	> 7200		421	25,0	11	**	> 7200		Imp.	0,02	
40.60.04	**	> 7200		448*	7200		458	1058	1	496	1,15	13

Tabela A. 12: Resultados obtidos pelo modelo MTZ na variação do limite superior da janela temporal b_j , com a_j fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a duração da rota, com tempos de espera

	−5%			+5%			+10%			+25%		
<i>Instância</i>	\hat{V}	<i>Ten</i>	<i>T.E.</i>	\hat{V}	<i>Temp</i>	<i>T.E.</i>	\hat{V}	<i>Temp</i>	<i>T.E.</i>	\hat{V}	<i>Temp</i>	<i>T.E.</i>
20.20.01	Imp.	0,01		387	0,02	5	387	0,05	6	387	0,03	9
20.20.02	Imp.	0,01		296	0,06	11	296	0,09	6	296	0,19	21
20.20.03	Imp.	1,29		403	0,02	10	403	0,09	1	397	0,05	27
20.20.04	Imp.	0,01		401	0,25	3	401	0,06	3	401	0,23	4
20.60.01	400	0,48	50	397	0,22	62	397	0,09	55	397	1,39	28
20.60.02	304	0,2	5	300	0,13	20	300	1,06	-	300	0,28	29
20.60.03	381	0,03	4	381	0,14	17	381	0,13	1	381	0,73	7
20.60.04	337	0,01	22	337	0,45	4	337	0,09	46	337	0,11	41
40.20.01	Imp.	0,01		520	1,58	4	520	0,39	4	520	5,1	6
40.20.02	Imp.	0,01		607	0,13	11	607	0,23	6	602	2,56	72
40.20.03	Imp.	0,01		514	0,47	9	514	0,2	36	514	2,51	14
40.20.04	Imp.	0,01		442	0,16	19	442	0,23	7	442	482,9	14
40.60.01	Imp.	0,01		535	43,9	17	535	41,3	24	520	29,9	10
40.60.02	Imp.	3,04		507*	358		503*	7200		508*	7200	
40.60.03	Imp.	0,01		465	137	8	464	35,3	8	464	115	3
40.60.04	475	19,1	0	475	2873	14	475	7	4	475	75,5	2

Tabela A. 13: Resultados obtidos pelo modelo MTZ na variação do limite inferior da janela temporal a_j , com b_j fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a duração da rota, sem tempos de espera

	-25%		-10%		-5%		+5%	
<i>Instância</i>	\hat{V}	<i>Temp</i>	\hat{V}	<i>Temp</i>	\hat{V}	<i>Temp</i>	\hat{V}	<i>Temp</i>
20.20.01	335	0,08	380	0,02	381	0,01	Imp.	0,01
20.20.02	281	2,18	295	0,05	295	0,02	Imp.	0,01
20.20.03	324	0,34	393	0,08	394	0,03	Imp.	0,01
20.20.04	396	0,08	396	0,02	396	0,02	Imp.	0,01
20.60.01	317	2,9	365	0,66	381	0,23	Imp.	0,01
20.60.02	247	3,09	277	0,3	289	0,23	311	0,09
20.60.03	337	5,2	356	0,92	365	0,2	Imp.	0,01
20.60.04	267	1,22	308	0,45	322	0,25	Imp.	0,01
40.20.01	**	> 7200	488	693	506	143	Imp.	0,01
40.20.02	**	> 7200	584	15,2	592	7,6	Imp.	0,01
40.20.03	431*	7200	483	113	496	1,37	Imp.	0,01
40.20.04	370*	7200	410	106	424	0,52	Imp.	0,01
40.60.01	**	> 7200	496	770	**	> 7200	555	1,48
40.60.02	**	> 7200	**	> 7200	**	> 7200	Imp.	54,6
40.60.03	**	> 7200	**	> 7200	**	> 7200	Imp.	0,01
40.60.04	**	> 7200	442	1096	**	> 7200	496	16,8

Tabela A. 14: Resultados obtidos pelo modelo MTZ na variação do limite superior da janela temporal b_j , com a_j fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a duração da rota, sem tempos de espera

	-5%		+5%		+10%		+25%	
<i>Instância</i>	\hat{V}	<i>Temp</i>	\hat{V}	<i>Temp</i>	\hat{V}	<i>Temp</i>	\hat{V}	<i>Temp</i>
20.20.01	Imp.	0,01	388	0,01	387	0,06	387	0,09
20.20.02	Imp.	0,01	296	0,06	296	0,03	296	0,14
20.20.03	Imp.	0,01	403	0,01	403	0,03	397	0,11
20.20.04	Imp.	0,01	401	0,03	401	0,03	401	0,39
20.60.01	Imp.	0,01	397	0,11	397	0,36	397	0,22
20.60.02	Imp.	0,01	300	0,28	300	0,22	300	1,11
20.60.03	Imp.	0,01	381	0,09	381	0,14	381	0,92
20.60.04	Imp.	0,01	337	0,28	337	0,17	337	0,42
40.20.01	Imp.	0,01	520	2,76	520	6,83	520	99,3
40.20.02	Imp.	0,01	607	0,41	607	0,69	602	30,9
40.20.03	Imp.	0,01	514	1,31	514	4,62	514	24,1
40.20.04	Imp.	0,01	442	1,03	442	4,2	442	207
40.60.01	Imp.	29,0	535	31,6	535	1220	520	561
40.60.02	Imp.	0,48	509*	7200	503	186	501*	7200
40.60.03	Imp.	0,01	465	63,7	465*	7200	X	7200
40.60.04	475	8,56	**	> 7200	475	675	475	2574

Tabela A. 15: Resultados obtidos pelo MFA na variação do limite inferior da janela temporal a_j , com b_j fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a distância total percorrida, com tempos de espera

	−25%			−10%			−5%			+5%		
<i>Instância</i>	\hat{V}	<i>Ten</i>	<i>T.E.</i>	\hat{V}	<i>Temp</i>	<i>T.E.</i>	\hat{V}	<i>Temp</i>	<i>T.E.</i>	\hat{V}	<i>Temp</i>	<i>T.E.</i>
20.20.01	330	0,27	78	378	0,09	30	378	0,05	30	Imp.	9,31	
20.20.02	281	1,28	37	281	0,48	37	281	0,08	37	286	0,05	25
20.20.03	324	0,44	93	393	0,11	24	393	0,13	24	Imp.	0,02	
20.20.04	396	0,8	12	396	0,16	12	396	0,05	12	Imp.	0,02	
20.60.01	254	1,4	182	279	0,69	157	279	0,78	157	335	0,2	100
20.60.02	201	0,45	120	244	0,61	77	244	0,23	77	246	0,08	66
20.60.03	328	3,51	78	352	0,76	54	352	0,41	54	352	0,14	45
20.60.04	208	0,55	168	230	0,09	146	252	0,16	124	284	1	96
40.20.01	442	51,0	105	466	1,33	81	481	1,61	66	Imp.	0,03	
40.20.02	397	60,0	215	544	0,81	68	548	0,47	64	Imp.	0,01	
40.20.03	372	149	156	454	7,22	74	474	6,16	54	Imp.	0,01	
40.20.04	324	29,2	131	386	7,6	69	388	0,87	67	Imp.	0,01	
40.60.01	356	165	252	411*	7200		481	151	127	508	89,2	100
40.60.02	355	48,3	183	398	107	140	419	17,9	119	470	1,48	68
40.60.03	362	875	158	376	41,1	144	390	48,5	130	Imp.	0,02	
40.60.04	292	182	217	373	95,6	136	386	105	123	410	38,7	102

Tabela A. 16: Resultados obtidos pelo MFA na variação do limite superior da janela temporal b_j , com a_j fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a distância total percorrida, com tempos de espera

	−5%			+5%			+10%			+25%		
<i>Instância</i>	\hat{V}	<i>Ten</i>	<i>T.E.</i>	\hat{V}	<i>Temp</i>	<i>T.E.</i>	\hat{V}	<i>Temp</i>	<i>T.E.</i>	\hat{V}	<i>Temp</i>	<i>T.E.</i>
20.20.01	Imp.	0,01		378	0,13	50	378	0,14	71	330	0,13	180
20.20.02	Imp.	0,01		279	0,09	55	266	0,17	84	266	1,04	132
20.20.03	Imp.	1,29		393	0,14	45	393	0,22	66	362	0,23	159
20.20.04	Imp.	0,01		396	0,09	32	389	0,23	60	389	0,42	121
20.60.01	335	0,16	80	279	0,48	179	279	0,86	201	259	3,76	286
20.60.02	249	0,08	58	244	0,23	93	244	0,38	109	207	0,34	194
20.60.03	352	0,19	29	352	0,13	74	352	0,72	95	327	2,67	181
20.60.04	284	0,64	79	252	0,16	143	230	0,09	184	223	0,64	247
40.20.01	Imp.	0,01		478	0,98	96	466	2,95	136	439	14,3	245
40.20.02	Imp.	0,01		548	0,66	95	544	0,8	129	435	10,6	330
40.20.03	Imp.	0,01		472	2,9	82	453	4,48	128	396	90,7	264
40.20.04	Imp.	0,01		388	0,6	90	386	10,9	115	334	69,3	235
40.60.01	Imp.	0,01		481	2609	157	418	507	251	356	1649	404
40.60.02	Imp.	3,04		419	19,8	146	391	74,0	201	362	48,0	311
40.60.03	Imp.	0,01		390	183	156	376	45,6	196	352	268	298
40.60.04	410	38,9	79	377	30,5	157	373	45,4	187	304	85,3	332

Tabela A. 17: Resultados obtidos pelo MFA na variação do limite inferior da janela temporal a_j , com b_j fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a duração da rota, com tempos de espera

	-25%			-10%			-5%			+5%		
<i>Instância</i>	\hat{V}	<i>Ten</i>	<i>T.E.</i>	\hat{V}	<i>Temp</i>	<i>T.E.</i>	\hat{V}	<i>Temp</i>	<i>T.E.</i>	\hat{V}	<i>Temp</i>	<i>T.E.</i>
20.20.01	335	0,22	5	379	0,12	1	381	0,06	3	Imp.	0,01	
20.20.02	281	2,06	0	284	0,2	3	286	0,09	5	311	0,19	
20.20.03	324	0,27	0	393	0,16	0	394	0,09	0	Imp.	0,02	
20.20.04	396	0,9	0	396	0,23	0	396	0,05	0	Imp.	0,02	
20.60.01	317	3,59	5	365	2,36	27	381	1	21	416	0,2	77
20.60.02	247	1,54	11	277	0,28	9	289	0,31	30	311	0,17	44
20.60.03	337	4,48	0	356	1,12	4	365	0,42	13	397	0,08	40
20.60.04	267	10,8	6	308	0,39	17	322	0,09	68	352	0,52	25
40.20.01	455	35,8	0	487	15,5	13	505	2,57	12	Imp.	0,03	
40.20.02	474	130	6	584	11,3	15	592	39,7	20	Imp.	0,01	
40.20.03	421	117	7	483	32,9	6	496	10,8	5	Imp.	0,01	
40.20.04	353	1713	1	410	38,8	7	424	2,29	6	Imp.	0,01	
40.60.01	414	891	8	502*	7200		515	103	5	555	101	9
40.60.02	401	228	5	465	118	14	493	126	10	525	26,4	39
40.60.03	366	2133	0	421	3077	6	447	209	35	Imp.	0,02	
40.60.04	386	3204	12	442	151	0	458	228	4	496	80,2	7

Tabela A. 18: Resultados obtidos pelo MFA na variação do limite superior da janela temporal b_j , com a_j fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a duração da rota, com tempos de espera

	-5%			+5%			+10%			+25%		
<i>Instância</i>	\hat{V}	<i>Ten</i>	<i>T.E.</i>	\hat{V}	<i>Temp</i>	<i>T.E.</i>	\hat{V}	<i>Temp</i>	<i>T.E.</i>	\hat{V}	<i>Temp</i>	<i>T.E.</i>
20.20.01	Imp.	0,01		387	0,34	9	387	0,11	0	387	0,17	9
20.20.02	Imp.	0,01		296	0,08	6	296	0,22	12	296	2,34	14
20.20.03	Imp.	1,29		403	0,09	5	403	0,09	2	397	0,17	23
20.20.04	Imp.	0,01		401	0,11	3	401	0,16	10	401	0,23	4
20.60.01	400	0,75	30	397	1,28	56	397	0,61	26	397	1,94	78
20.60.02	304	0,17	44	300	0,39	51	300	0,37	49	300	1,34	31
20.60.03	381	0,11	22	381	0,33	0	381	0,25	19	381	1,56	11
20.60.04	337	0,38	36	337	0,28	37	337	0,3	39	337	0,89	108
40.20.01	Imp.	0,01		520	9,28	6	520	2,93	0	520	21,4	43
40.20.02	Imp.	0,01		607	1,26	40	607	2,54	28	602	7,66	154
40.20.03	Imp.	0,01		514	3,13	10	514	3,68	16	514	34,1	43
40.20.04	Imp.	0,01		442	0,66	27	442	2,08	17	442	140	14
40.60.01	Imp.	0,01		535	14,5	11	535	91,4	19	520	87,5	18
40.60.02	Imp.	3,04		507	358	13	503	92,8	4	501	2287	20
40.60.03	Imp.	0,01		465	87,6	16	464	120	10	464	179	17
40.60.04	475	9,2	6	475	142	27	475	151	11	475	712	15

Tabela A. 19: Resultados obtidos pelo MFA na variação do limite inferior da janela temporal a_j , com b_j fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a duração da rota, sem tempos de espera

	−25%		−10%		−5%		+5%	
Instância	\hat{V}	Temp	\hat{V}	Temp	\hat{V}	Temp	\hat{V}	Temp
20.20.01	336	0,28	380	0,17	382	0,08	Imp.	0,01
20.20.02	281	1,14	295	0,16	295	0,06	Imp.	0,01
20.20.03	324	0,17	393	0,14	394	0,06	Imp.	0,01
20.20.04	396	0,39	396	0,13	396	0,05	Imp.	0,01
20.60.01	317	3,46	365	1,48	384	1,4	Imp.	0,01
20.60.02	247	3,18	277	0,91	289	3,03	311	0,38
20.60.03	337	7,6	359	1,87	366	1	Imp.	0,01
20.60.04	267	4,68	308	0,86	322	0,34	Imp.	0,01
40.20.01	455	16,1	487	16,1	506	14,7	Imp.	0,01
40.20.02	474	223	584	14,0	593	12,5	Imp.	0,01
40.20.03	421	48	483	38,3	496	2,36	Imp.	0,01
40.20.04	353	298	410	29,3	424	2,5	Imp.	0,01
40.60.01	414	231	496	258	515	169	555	41,6
40.60.02	401	3154	473*	7200	493	81,5	Imp.	54,6
40.60.03	366	854	421	1766	447	1483	Imp.	0,01
40.60.04	**	> 7200	442	821	458	65,1	496	152

Tabela A. 20: Resultados obtidos pelo MFA na variação do limite superior da janela temporal b_j , com a_j fixo, $\forall j \in V$, no objetivo de minimizar a duração da rota, sem tempos de espera

	−5%		+5%		+10%		+25%	
Instância	\hat{V}	Temp	\hat{V}	Temp	\hat{V}	Temp	\hat{V}	Temp
20.20.01	Imp.	0,01	388	0,06	387	0,06	387	0,25
20.20.02	Imp.	0,01	304	0,08	297	0,3	296	1,01
20.20.03	Imp.	0,01	403	0,06	403	0,09	397	0,17
20.20.04	Imp.	0,01	403	0,06	403	0,25	403	0,42
20.60.01	Imp.	0,01	400	3,56	397	2,62	397	0,81
20.60.02	Imp.	0,01	300	1,22	300	2,15	300	1,58
20.60.03	Imp.	0,01	381	0,5	381	1,45	381	2,81
20.60.04	Imp.	0,01	337	4,7	337	1,11	337	4,6
40.20.01	Imp.	0,01	520	0,9	520	14,1	520	31,8
40.20.02	Imp.	0,01	607	5,12	607	4,31	602	35,1
40.20.03	Imp.	0,01	514	1,76	514	18,0	514	83,6
40.20.04	Imp.	0,01	442	1,14	442	24,7	442	122
40.60.01	Imp.	29,0	535	7,49	535	28,2	520	3650
40.60.02	Imp.	0,48	507	177	505*	7200	510*	7200
40.60.03	Imp.	0,01	465	124	464	124	464	765
40.60.04	475	19,2	475	145	475	43,5	475	1011